Издательство Грамота

Педагогика. Вопросы теории и практики
Pedagogy. Theory & Practice

ISSN 2686-8725 (online)
ISSN 2500-0039 (print)

2024. Том 9. Выпуск 10 | 2024. Volume 9. Issue 10
Материалы журнала доступны на сайте (articles and issues available at): pedagogy-journal.ru

RU

Элементы методологии рутинной математической деятельности в обучении студентов бакалавриата и магистрантов

Мельников Ю. Б., Кныш А. А.

Аннотация. Цифровизация всех областей жизни в образовании проявляется в основном во внедрении дистанционных технологий, электронных средств обучения и электронных инструментов для контроля и управления. На наш взгляд, этим ограничиваться нельзя, необходимо менять приоритеты в содержательном и деятельностном компонентах обучения. В частности, в обучении математической деятельности нельзя ограничиваться управлением на уровне алгоритмов. Авторы на основе теоретических исследований и анализа практики обучения выделили три уровня управления деятельностью: уровень типовых алгоритмов, типовых стратегий предметной деятельности, уровень методологии. Цель исследования состоит в построении модели методологии рутинной математической деятельности, адаптированной к использованию в цифровой среде и применимой в практике обучения математике студентов бакалавриата и магистратуры. В статье методология деятельности рассматривается с прикладной точки зрения, основанной на многолетней практике обучения студентов математике и авторской трактовке понятия «стратегия деятельности» как механизма создания планов деятельности (здесь под механизмом понимается объективный компонент системы управления деятельностью). Научная новизна исследования состоит в том, что впервые, во-первых, построена и опробована на практике (при разработке учебно-методического обеспечения, проведении занятий, организации самостоятельной работы) модель методологии рутинной математической деятельности, во-вторых, на основе анализа этой модели и практики обучения выделены приоритетные компоненты методологии рутинной математической деятельности. В результате исследования авторами предложена модель методологии рутинной математической деятельности в виде системы из трех компонентов: 1) построение достаточно адекватных моделей реализации уже освоенных стратегий; 2) система «внутренних метастратегий», т. е. стратегий формирования типовых компонентов стратегий; 3) система «внешних метастратегий», т. е. стратегий комбинирования известных стратегий. На этой основе выделены приоритетные компоненты методологии рутинной математической деятельности. Приведены примеры использования методологии для построения стратегий решения математических задач.

EN

Elements of the methodology of routine mathematical activity in teaching undergraduate and graduate students

Y. B. Melnikov, A. A. Knysh

Abstract. Digitalization of all areas of life in education is manifested mainly in the introduction of distance technologies, electronic learning tools and electronic tools for monitoring and management. In our opinion, this is not enough, it is necessary to change priorities in the content and activity components of training. In particular, in teaching mathematical activity, one cannot limit oneself to management at the algorithm level. Based on theoretical research and the analysis of teaching practice, the authors identified three levels of activity management: the level of typical algorithms, typical strategies of subject activity, and the level of methodology. The aim of the study is to build a model of the methodology of routine mathematical activity adapted for use in the digital environment and applicable in the practice of teaching mathematics to undergraduate and graduate students. In the article, the methodology of activity is considered from an applied point of view, based on many years of practice of teaching mathematics to students and the author's interpretation of the concept of "activity strategy", thought of as a mechanism for creating activity plans (the mechanism is understood here as an objective component of the activity management system). The scientific novelty of the study consists in the fact that, firstly, a model of the methodology of routine mathematical activity has been built and tested in practice (during the development of educational and methodological support, conducting classes, organizing independent work), and secondly, priority components

Научная статья (original research article) | https://doi.org/10.30853/ped20240120

of the methodology of routine mathematical activity have been identified based on the analysis of this model and teaching practice. As a result of the study, the authors proposed a model of the methodology of routine mathematical activity in the form of a system of three components: 1) building sufficiently adequate models for implementing already mastered strategies; 2) a system of "internal meta-strategies", i.e., strategies for forming typical components of strategies; 3) a system of "external meta-strategies", i.e., strategies for combining known strategies. On this basis, priority components of the methodology of routine mathematical activity have been identified. Examples of using the methodology for building strategies for solving mathematical problems are given.

Введение

Актуальность темы исследования определяется тем, что подготовка к контрольной работе, к сессии, к ЕГЭ и т. д. нередко сводится к «нарешиванию», «прорешиванию» задач. Значение этих «терминов» весьма туманно, и мысль, что можно добиться лучшего результата с меньшими затратами ресурсов, нередко не принимается ни обучаемыми, ни преподавателями. Результатом процесса поиска решения задачи является *текст решения задачи, представляющий собой описание алгоритма получения ответа*. Педагоги часто ориентируются на управление деятельностью обучаемых посредством алгоритмов, и в случае, когда нужный алгоритм неизвестен или чрезмерно сложен (например, для геометрических задач, решения уравнений и т. д.), применяется «нарешивание», аналогичное обучению нейросети, т. е. автоматическому формированию алгоритма. Недостатки «нейросетевого» «обучения нарешиванием»: 1) получение текста решения непрозрачно и субъективно; 2) расходуется плохо контролируемый объем ресурсов; 3) механизм получения текста решения формируется неосознанно и быстро деградирует из-за особенностей человеческой памяти.

Как показали наши исследования (Мельников, Привалов, 2019; Мельников, 2021; Melnikov, 2021) и практика обучения математике, альтернативой «прорешиванию» задач, т. е. «обучению нейросети», может быть обучение реализации стратегий, т. е. осознанному *управлению созданием плана деятельности* (Мельников, Привалов, 2019; Мельников, 2021). В системе управления можно выделить субъективный (например, мотив деятельности) и объективный (механизм управления) компоненты. Данная работа посвящена объективному (не зависящему от субъекта деятельности) компоненту системы управления, т. е. механизму создания стратегий и обучению его применению в процессе изучения математики в рамках рутинной математической деятельности. Ю. Б. Мельников выделил три уровня управления математической деятельностью: 1) уровень типовых алгоритмов; 2) уровень типовых стратегий (Мельников, Привалов, 2019; Мельников, 2021); 3) уровень методологии, под которой мы понимаем систему создания и реализации стратегий деятельности. Работа на уровне методологии упрощает деятельность, поскольку использует более эффективный аппарат управления. *Главное различие между перечисленными уровнями управления состоит не в сложности, «заумности» решаемых задач, а, во-первых, в характере поиска решения, создания плана деятельности, во-вторых, в уровне автономности деятельности обучающихся, характере их управления деятельностью, в-третьих, в уровне самостоятельности при решении субъективно новых задач*, т. е. задач, для которых в их субъективном опыте нет аналогов. С этой точки зрения нет принципиальной разницы в методологическом компоненте для студентов бакалавриата, специалитета и магистратуры, различие состоит в уровне сформированности соответствующих когнитивных структур, морально-психологических качеств, наличии необходимого опыта управления.

Цель работы – построить модель методологии рутинной математической деятельности: а) рассматриваемой как объективный компонент создания стратегий деятельности; б) адаптированной к использованию в цифровой среде; в) применимой в практике обучения математике. Достижение этой цели сведено к решению задач:

1) выделить виды управления деятельностью, актуальные для методики обучения математике, в первую очередь, в высшей школе;
2) рассмотреть план как модель деятельности и механизмы создания планов как моделей управления деятельностью студентов (отметим, что здесь под механизмом понимается объективный компонент системы управления);
3) сформировать теоретико-модельную трактовку понятия «методология», адаптированную для использования управлением математической деятельностью студентов и магистрантов в цифровую эпоху;
4) выделить основные компоненты методологии рутинной математической деятельности студентов бакалавриата и магистрантов;
5) применить результаты на практике и проиллюстрировать примерами;
6) выделить изменения процесса обучения и личности обучаемого, необходимые для работы на уровне стратегий и на уровне-методологии.

Методы исследования: анализ практики обучения математике с позиций деятельностного подхода к обучению и применение авторской теории моделирования (Melnikov, 2021), включающей в себя алгебру моделей (основанную на формально-конструктивной трактовке модели), теорию адекватности и теорию стратегий (Мельников, Привалов, 2019; Мельников, 2021). В основе нашей теории моделирования лежит алгебраический подход к моделированию, под которым мы понимаем систему из трех компонентов: 1) системы базовых моделей (например, базовых стратегий деятельности); 2) системы типовых преобразований и типовых комбинаций моделей; 3) механизма аппроксимирования, предназначенного, во-первых, для получения нужной модели в виде результата типовых преобразований и типовых комбинаций базовых моделей, во-вторых, в декомпозиции имеющейся модели в виде результата применения типовых преобразований и типовых комбинаций базовых моделей.

Теоретические основы. Методология работы основана на анализе практики обучения математике, на системном подходе к исследованию (Bertalanffy, 1968; Богданов, 1989a; 1989b) и на авторской теории моделирования (Melnikov, 2021), частью которой является теория стратегий (Мельников, Привалов, 2019; Мельников, 2021), где, во-первых, разделяются понятия «стратегия» и «реализация стратегии», во-вторых, принято за аксиому, что каждый пункт плана деятельности воспринимается как ссылка либо на доступный алгоритм деятельности, либо на цель деятельности, способ достижения которой не указан, в-третьих, рассматриваются два вида моделей стратегии: 1) внутренние алгебраические представления стратегии, в которых стратегия рассматривается как система ее составных частей; 2) внешние алгебраические представления стратегии, в рамках которых стратегия представлена в виде комбинации других стратегий.

Практическая значимость полученных результатов состоит, во-первых, в изменении методики обучения математике, ориентированной на управление деятельностью на уровне реализации стратегий и на уровне методологии, в отличие от обучения, аналогичного тренировке нейросети, во-вторых, в разработке соответствующего учебно-методического обеспечения. Несколько электронных учебников подготовлены к печати, два электронных учебника уже опубликованы:

- Мельников Ю. Б. Высшая математика. Линейная алгебра и геометрия: электронное учебное пособие. Екатеринбург: Уральский государственный экономический университет, 2017. http://lib.usue.ru/resource/free/17/MelnikovAlgebra7/index.html;
- Мельников Ю. Б. Математика: электронные учебные материалы. Екатеринбург: Уральский государственный экономический университет, 2018. http://lib.usue.ru/resource/free/18/MelnikovAlgebra8/index.html.

Обсуждение и результаты

Системы управления деятельностью и их классификации. Управление изучают теория менеджмента, психология, математика и др. Здесь мы почти не рассматриваем субъективный компонент управления (мотивация, психологические аспекты организации и др.), сосредоточимся на объективном компоненте, механизме управления. Начнем с нескольких классификаций управления деятельностью, актуальных для теории, методики и практики обучения математике.

I) Характер взаимодействия целей, ресурсов и алгоритмов: I.1) прямое управление (управление посредством непосредственных ссылок на алгоритмы); I.2) косвенное управление (управление посредством указания целей и доступных ресурсов). Примером ориентации на косвенное управление является задача «векторным методом докажите, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины».

II) Уровни смешения этапа планирования и этапа реализации плана: II.1) управление посредством заранее составленного плана; II.2) чередование этапа создания и этапа выполнения плана деятельности; II.3) эвристическое управление: выполнение некоторых действий до построения более-менее адекватного плана, план создается по результатам экспериментирования.

III) Уровень обработки информации при планировании: III.1) использование типовых алгоритмов; III.2) использование типовых (известных) стратегий деятельности; III.3) уровень методологии. Например, вычисление производной представляет собой применение алгоритма, а вычисление первообразной – реализацию соответствующей стратегии. Владение основами методологии требуется для самостоятельного (пусть даже под руководством преподавателя) получения алгоритма вычисления производной, самостоятельного формирования метода математической индукции, например, из метода рассуждений «от противного» и т. п.

План как модель деятельности. Алгоритмы, стратегии и реализация стратегии. Важнейшей моделью объективного компонента управления деятельностью является *план деятельности*. Примем за аксиому, что ***каждый пункт плана деятельности субъект деятельности воспринимает либо как ссылку на доступный алгоритм деятельности, либо как ссылку на цель деятельности, способ достижения которой не указан***. Планирование можно рассматривать как постепенное преобразование плана деятельности к виду, когда все его пункты воспринимаются исполнителем как ссылки на доступные алгоритмы. Здесь под алгоритмом мы понимаем систему однозначно выполняемых команд, математически алгоритм может быть формализован, например, в виде нормального алгоритма Маркова, машины Тьюринга и др.

Для моделирования процесса планирования необходима трактовка модели, адаптированная к применению в цифровой среде. Отметим, что цифровизация образования требует математических моделей разных аспектов процесса обучения (Эседова, Гаджимахадова, 2022; Мищик, 2014), исследования разных аспектов моделирования, актуальных для системы образования (Когаловский, 2013; Cocieru, Katz, McDonald, 2019) и адаптации понятийного аппарата к цифровой среде. Например, рассмотрим определение «цель деятельности – это осознанный образ предвосхищенного результата, на достижение которого направлено действие человека» (Маклаков, 2016, с. 123). Во-первых, как информационная система будет оценивать адекватность восприятия обучаемым цели деятельности? Во-вторых, как использовать приведенное выше определение цели для автоматизации оценивания уровня достижения поставленной цели? В-третьих, как с помощью этого определения цели обеспечить мониторинг информационной системой изменения восприятия цели обучаемым в процессе его развития: физического, интеллектуального, эмоционального? Мы сформируем определение цели деятельности на базе теории адекватности (Melnikov, 2021). Одна из аксиом адекватности утверждает, что оценка адекватности является результатом сравнения оцениваемой модели и эталонной модели (см. Схему 1).

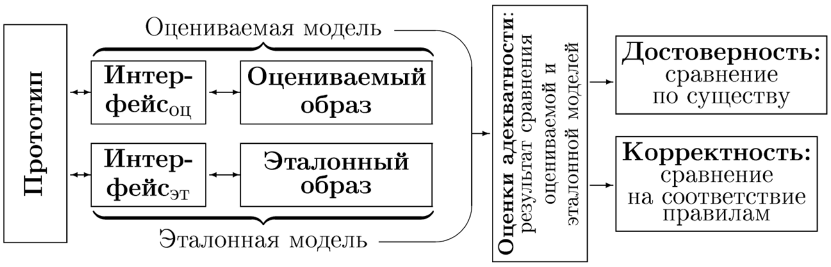

Схема 1. *Иллюстрация к понятию «адекватность модели»*

С позиций теории моделирования (Melnikov, 2021) под ***целью деятельности*** *будем понимать систему эталонных моделей результата деятельности*, что согласуется с данными, полученными R. Burgueno, A. Sicilia, M. Alcaraz-Ibanez et al. (2020). Например, в состав цели «найти треугольник» входят такие эталонные модели, как «длины двух сторон треугольника и угол между ними», «уравнения сторон треугольника в некоторой системе координат», «фигуры, пересечением которых является искомый треугольник», «грань многогранника, равная искомому треугольнику» и т. д. Мы предложили контролировать полноту состава цели с помощью различных классификаций эталонных моделей. Например, по уровню общности мы выделили три класса эталонных моделей: 1) язык модели; 2) шаблоны; 3) конкретные эталонные образцы.

Цель можно рассматривать как план деятельности, состоящий из одного пункта, этот план надо преобразовать таким образом, чтобы все пункты плана исполнитель воспринимал как ссылки на алгоритм. В качестве механизма создания плана деятельности мы рассматриваем стратегию (см. Схему 2).

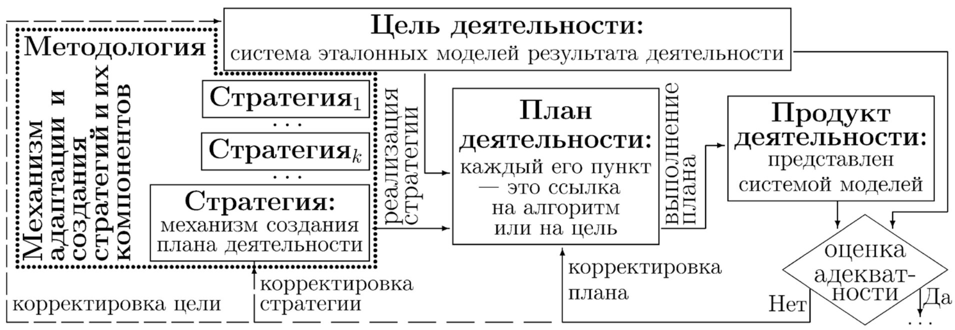

Схема 2. *Модель управления деятельностью, основанная на создании и выполнении планов деятельности*

Наша интерпретация понятия «стратегия» согласуется с позицией других авторов (Тестов, 2005; Диченко, 2007; Перикова, Ловягина, Бызова, 2019), хоть и не совпадает «дословно». Рутинный процесс создания плана можно представить как последовательное преобразование планов, состоящее в замене пунктов плана, воспринятых как (локальная) цель деятельности, на план достижения этой (локальной) цели. Начальным является план из одного пункта, содержащего ссылку на исходную цель деятельности, например, представленную требованием задачи (см. Схему 3).

$$\underset{\mathbf{П}_0}{\boxed{\mathbf{Ц}_0}} \xrightarrow{S_1} \underset{\mathbf{П}_1}{\boxed{\mathbf{А}_1\mathbf{Ц}_2\mathbf{Ц}_3\mathbf{А}_2}} \xrightarrow{S_2} \underset{\mathbf{П}_2}{\boxed{\mathbf{А}_1\mathbf{Ц}_{21}\mathbf{А}_{22}\mathbf{А}_{23}\mathbf{Ц}_3\mathbf{А}_2}} \xrightarrow{S_3} \cdots \xrightarrow{S_m} \underset{\mathbf{П}_n}{\boxed{\mathbf{А}_1 \ldots \mathbf{А}_{k \ldots p} \ldots \mathbf{А}_2}}$$

Схема 3. *Схема преобразований плана (здесь $А_{ij}$ – ссылка на доступный алгоритм,*
$Ц_{ij}$ – ссылка на локальную цель деятельности;
$П_0$ — начальный план из одного пункта в виде цели $Ц_0$;
$П_1$, $П_2$,… – планы, преобразованные с помощью стратегий S_1, S_2,…;
$П_n$ – финальный план, все пункты которого являются ссылками на алгоритмы, доступные исполнителю плана)

Варианты перехода от одного варианта плана к другому, т. е. варианты реализации (применения) стратегии, представлены на Схеме 4.

Рассмотрим применения стратегии *S* к улучшению плана $А_{11}$, $А_{12}$, $Ц_{13}$, $А_{14}$, $Ц_{15}$, где $А_{1j}$ – ссылка на доступный алгоритм, $Ц_{1j}$ – ссылка на локальную цель деятельности, путем замены цели $Ц_{13}$ на план ее достижения $А_{21}$, $А_{22}$, $Ц_{23}$. Если для успешного применения стратегии *S* изначальных ресурсов достаточно, то данный вариант реализации стратегии мы назвали **локальной реализацией стратегии** S (см. Схему 4а). Например, рассмотрим план решения задачи «найти радиус окружности, вписанной в треугольник с основанием 24 и боковыми сторонами длиной 15»: $А_{11}$ – «найти полупериметр исходного треугольника», $Ц_{12}$ – «найти площадь исходного треугольника», $А_{13}$ – «найти искомый радиус как частное от деления площади на полупериметр треугольника». Если стратегия *S* основана на формуле Герона, то цель $Ц_{12}$ заменяется планом: $А_{21}$ – «найти разности полупериметра с каждой из длин сторон», A_{22} – «умножить полупериметр на произведение найденных разностей», A_{23} – «извлечь корень из полученного числа». Получили план

$$A_{11};\ A_{21};\ A_{22};\ A_{23};\ A_{13}.$$

В результате его выполнения получим, что искомый радиус равен 4 (см. Рисунок 1).

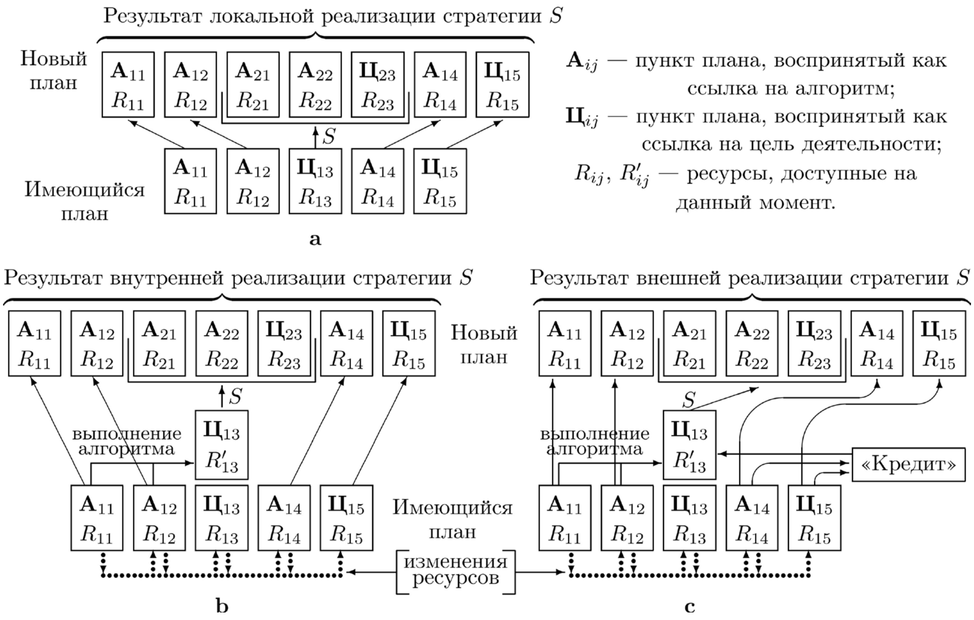

Схема 4. *Варианты реализации (применения) стратегий: локальная реализация, внутренняя, внешняя* (Мельников, 2021)

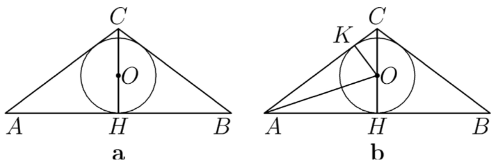

Рисунок 1. *Иллюстрация к примерам применения стратегий*

Если ресурсов R_{13} недостаточно для применения стратегии *S*, можно попытаться получить необходимый ресурс, выполнив часть предшествующих пунктов плана. Такой вариант мы назвали **внутренней реализацией стратегии** *S* (см. Схему 4b). Например, пусть первоначальный план решения рассмотренной выше задачи таков: $Ц'_{11}$ – «провести дополнительные построения для получения хороших треугольников», $Ц'_{12}$ – «найти искомый радиус из равенства и подобия полученных треугольников». Для того чтобы построить план достижения цели $Ц'_{12}$, придется сначала выполнить первый пункт этого плана. В результате получим Рисунок 1b. Как итог у нас появился ресурс для построения плана достижения цели $Ц'_{12}$.

Если выполнение фрагмента плана, предшествующего на Схеме 4 пункту $Ц_{12}$, не обеспечит стратегию *S* ресурсами, необходимыми для построения плана достижения цели $Ц_{12}$, то остается получить ресурсы «в кредит», «расплатиться» за который мы сможем в процессе выполнения полученного плана. Такой вариант мы назвали **внешней реализацией стратегии** *S* (см. Схему 4c). Примером может быть введение буквенного значения *r* искомого радиуса, причем расплатой за этот «кредит» будет соответствующее уравнение. Внешняя реализация стратегии является основой для стратегии предвкушения (Мельников, 2021). Если обучение не сводится к усвоению алгоритмов или «тренировке нейросети» путем «нарешивания задач», то внешняя реализация стратегии требует использования когнитивных структур, отвечающих за восприятие «кредита» как реальных доступных ресурсов, а не как «неполноценных», «ненастоящих». Например, при составлении уравнения в рассматриваемой выше задаче буквенное значение *r* надо воспринимать так же, как числовые значения длин других отрезков. При использовании рассуждений «от противного» – считать «всерьез», что заключение импликации ложно и т. п.

Теоретико-модельная трактовка понятия «методология математической деятельности». ***Под методологией математической деятельности*** *мы будем понимать объективный компонент системы создания и реализации стратегий деятельности,* т. е. аппарат создания и применения стратегий. Это наше определение согласуется с другими трактовками: «Методология предполагает процедуру осмысленного отбора центральных положений, ведущих идей, принципов. Таким образом, это система подходов, оснований, методов, принципов, с помощью которых изучается и преобразовывается действительность» (Клепиков, Беспрозванная, 2015, с. 98); «Методология методики обучения истории математики рассматривается как система знаний о деятельности в области ее преподавания и применения; о закономерностях, принципах, результатах, формах, средствах и методах этой деятельности» (Гильмуллин, 2011, с. 6); «Методология (от греч. μεθοδολογία – учение о способах; от др. греч. μέθοδος из μέθ- + οδος, букв. "путь вслед за чем-либо" и др. греч. λόγος – мысль, причина) – учение о системе понятий и их отношений, – система базисных принципов, методов, методик, способов и средств их реализации в организации и построении. Методология науки в традиционном понимании – это учение о методах и процедурах научной деятельности, а также раздел общей теории познания, в особенности теории научного познания (эпистемологии) и философии науки. Методология в прикладном смысле – это система (комплекс, взаимосвязанная совокупность) принципов и подходов исследовательской деятельности, на которые опирается исследователь (ученый) в ходе получения и разработки знаний в рамках конкретной дисциплины» (История и методология математики..., 2017, с. 12). Интерпретации понятия «методология», рассматриваемые Б. И. Федоровым (2011) и А. И. Орловым (2017), можно интерпретировать как смешение наших трактовок понятий «стратегия деятельности» и «методология». Ориентация на изучение стратегии и основ методологии представлена в пособии А. М. Сухотина и Т. В. Тарбокова (2020).

Отражение методологии математической деятельности в теории и методике обучения математике изучается в трудах А. Л. Симанова (1995), М. В. Шабановой (2004), А. И. Орлова (2014), А. А. Остапенко и О. Л. Янушкявичене (2011), В. А. Еровенко (2021), а также А. Г. Карапетян и А. Г. Маргарян (2022). Как компонент методологии методики обучения математике представлена триада диалогов (Семенов, 2013): «предмет – метод», «содержание – форма», «цель (ценность) – средство (достижения цели)». С позиций методологии математики рассматривается математическая и учебно-математическая деятельность (Розин, 2019), а также такой редко исследуемый аспект математики, как красота (Тестов, 2019). Курсы «Основы методологии математики», «История и методология прикладной математики» и т. п. были введены в программу педагогического обучения (История и методология математики, 2017; Русанов, Росляков, 2004; Варанкина, 2015; Шило, 2019). Стратегии включают в состав методологии, например, Е. И. Смирнов и С. А. Тихомиров (2023, с. 51). Помимо собственно термина «методология» рассматриваются понятия, к которым применимо прилагательное «методологический», например, Е. И. Смирнов, А. Д. Уваров, С. А. Тихомиров выделяют «методологические (μ), содержательные (α) и процессуальные (β) параметры динамики» процесса (2024, с. 25). В. Д. Шадриков говорит о методологическом характере работы, методологических положениях (2021, с. 26) и о методологических принципах (2021, с. 35) и др.

Наша модель методологии основана на алгебраическом подходе к моделированию (Мельников, 2021), т. е. на следующей системе: 1) совокупность базовых объектов; 2) совокупность типовых преобразований и типовых комбинаций объектов; 3) механизм аппроксимирования, предназначенный для (приближенного) представления объекта в виде результата применения *типовых* преобразований и *типовых* комбинаций к *базовым* объектам.

Если базовые элементы представляют собой составляющие исходного объекта (например, компоненты стратегии), то результат применения механизма аппроксимирования мы будем называть **внутренним алгебраическим представлением** объекта, в частности – **стратегии**. В противном случае результат применения механизма аппроксимирования мы будем называть **внешним алгебраическим представлением** объекта, в частности – **стратегии**. Например, представление треугольника как системы из трех отрезков является *внутренним*, а если он рассматривается как сечение куба некоторой плоскостью, то это его представление является *внешним*.

Внутреннее алгебраическое представление стратегии (Мельников, Привалов, 2019) схематически изображено на Схеме 5, состоит в представлении объекта в виде комбинации его составных частей; список типовых преобразований см. в работе Ю. Б. Мельникова и С. М. Привалова (2019).

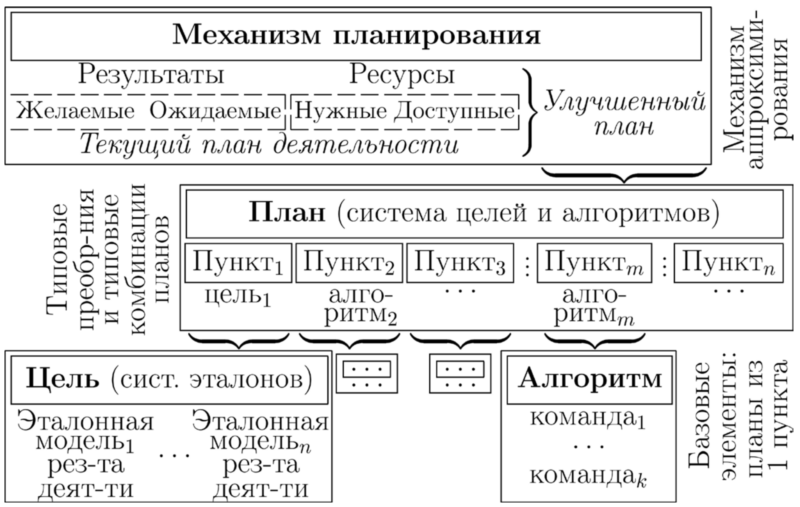

Схема 5. *Внутреннее алгебраическое представление стратегии*

Применение методологии к созданию или адаптации стратегии в этом случае состоит в изменении состава базовых целей и базовых алгоритмов, изменении или введении новых типовых преобразований и типовых комбинаций, а также совершенствовании механизма аппроксимирования.

Примером **внешнего алгебраического представления стратегии** является ее выражение через другие стратегии. Мы (Мельников, 2021) выделили 2 варианта комбинирования стратегий (см. Схему 6).

$$\underbrace{p_1;\ldots;p_k}_{\text{План}} \xrightarrow{S_1 * S_2} \underbrace{p'_1;\ldots;p'_m}_{\text{План}'}$$

a

$$\begin{tikzcd} \underbrace{p_1;\ldots;p_k}_{\text{План}} \arrow[r, "S_1"] \arrow[rr, bend left, "S_1 \circ S_2"] & \underbrace{p'_1;\ldots;p'_m}_{\text{План}'} \arrow[r, "S_2"] & \underbrace{p''_1;\ldots;p''_n}_{\text{План}''} \end{tikzcd}$$

b

Схема 6. *Параллельная и последовательная комбинация стратегий деятельности*

На Схеме 6а изображено параллельное комбинирование стратегий, обычно заключающееся в объединении, пересечении и других вариантах комбинирования компонентов стратегий, представленных на Схеме 6.

Использование внешнего и внутреннего представления стратегии требует знания состава типовых целей, типовых преобразований планов деятельности и владения хотя бы важнейшими механизмами аппроксимирования (Мельников, Привалов, 2019).

Приведенные результаты положены нами в основу описания методологии рутинной математической деятельности.

Компонентное представление методологии рутинной математической деятельности. С точки зрения реализации алгебраического подхода к созданию и адаптации стратегий методология включает в себя три компонента:

1) систему моделей реализации уже освоенных стратегий, в частности, «расшифровку» ссылок на типовые алгоритмы;

2) систему «внутренних метастратегий», т. е. стратегий формирования типовых компонентов стратегии на базе алгебраического подхода к моделированию и внутреннего алгебраического представления стратегий (Мельников, Привалов, 2019):

2.1) стратегии формирования типовых целей и обогащения их состава, включая фиксацию соответствующих языков, формализацию типовых способов представления рассматриваемых феноменов (т. е. шаблонов);

2.2) стратегии формирования преобразований феноменов, включая типовые алгоритмы;

2.3) стратегии формирования типовых механизмов аппроксимирования, которые в большинстве случаев можно рассматривать как результат реализации рекомендаций по улучшению адекватности моделей (Мельников, Онохина, Шитиков, 2018);

3) систему «внешних метастратегий», т. е. стратегий построения внешнего алгебраического представления стратегии, см., например, внешнее алгебраическое представление стратегий рутинного моделирования, рутинной проектной и рутинной исследовательской деятельности (Мельников, 2021) (см. Таблицу 1).

Таблица 1. *Базовые стратегии рутинной деятельности*

Стратегия рутинного моделирования	
Стратегия алгоритмического построения модели	
Стратегия адаптации известной модели	Стратегия поиска и использования аналогии
	Стратегия обогащения и редуцирования модели
	Стратегия смены ролей и приоритетов
Стратегия рутинной проектной деятельности	
Стратегия рутинного моделирования	
Стратегия построения новой модели	Стратегия комбинирования моделей
	Стратегия перехода от деталей к агрегатам
	Стратегия построения моделей из характеристик, отношений и компонентов интерфейса
Стратегия построения использования моделей адекватности	Стратегия приоритетного анализа «экстремальных» ситуаций
	Стратегия предвкушения
	Стратегия выявления и использования ограничений
Стратегия рутинной исследовательской деятельности	
Стратегия рутинного моделирования	
Стратегия построения новой модели	Стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций
	Стратегия предвкушения
	Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к исследованию системы объектов

Приведем пример рассуждений на уровне реализации стратегий и уровне методологии рутинной математической деятельности для задачи расширения поля с помощью корня многочлена. Разумеется, данное изложение не повторяет дословно ход реального занятия, в частности, использование стратегий в норме должно бы происходить в значительной степени неосознанно, «на автомате». Добиться этого от студентов 1-2 курса практически невозможно, но некоторые студенты в конце обучения проявляют способность применять хотя бы основы методологии рутинной математической деятельности.

Так, задача состоит в построении конечного расширения поля P, точнее, в создании плана решения данной задачи. В качестве начального плана деятельности выступает план, состоящий из одного пункта: цели деятельности. Напомним, что под целью деятельности мы понимаем систему эталонных моделей результата деятельности. Для формирования эталонных моделей применим стратегию построения модели, точнее, стратегию алгоритмического построения модели искомого объекта (см. Таблицу 1). Надо найти *конечное поле*, т. е. некоторое *множество* с *операциями*. Начнем с формирования множества – носителя искомого поля. Сначала применим стратегию предвкушения: пусть искомое поле Q уже построено. За неимением лучшего попытаемся применить стратегию поиска и использования аналогии. Одним из основных инструментов применения этой стратегии является система ассоциаций. К этому моменту у студентов со словом «поле» (в алгебраическом смысле этого термина) должна быть сформирована ассоциация «линейное пространство». В результате применения стратегии обогащения и редуцирования модели обнаруживаем, что если «забыть», как определено умножение в Q в случае, если оба множителя находятся вне P, получим, что Q можно рассматривать как линейное пространство над P. В результате применения стратегии построения и использования моделей адекватности (см. Таблицу 1), точнее, стратегии выявления и использования ограничений, получаем, что элементы поля P являются одновременно векторами линейного пространства Q. Осталось найти остальные элементы из Q. Для этого естественно применить стратегию алгоритмического построения модели, а именно, воспользоваться тем, что элементы конечномерного линейного пространства обычно представляют в виде линейной комбинации векторов некоторого базиса этого пространства. Значит, надо найти базис. В качестве первого базисного вектора можно взять единицу поля P, рассматриваемую сейчас как вектор линейного пространства Q. В качестве второго базисного вектора естественно взять элемент из Q, не принадлежащий P. Что значит «взять элемент»? Это значит «представить данный элемент некоторой моделью». В данном случае в качестве модели можно взять, например, буквенный идентификатор, например, a. Применим стратегию приоритетного изучения «экстремальных ситуаций» и в качестве второго базисного вектора возьмем a^2. Если система векторов $1,a,a^2$ линейно независима, то добавим в систему a^3, и будем продолжать этот процесс, пока система $1,a,a^2,a^3,\ldots,a^n$ не окажется линейно зависимой. По определению это означает, что

$$u_0 + u_1a + u_2a^2 + u_3a^3 + \ldots + u_{n-1}a^{n-1} + a^n = 0. \quad (1)$$

Значит, во-первых, элемент a является корнем многочлена

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots + u_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Во-вторых, по построению система $1,a,a^2,a^3,\ldots,a^{n-1}$ является линейно независимой. Можно предположить, что натянутое на эту систему подпространство V замкнуто относительно операций «сложение» и «умножение», т. е. это подпространство V является полем. Для этого зададим операции на V и убедимся, что они удовлетворяют аксиомам поля. По определению операция – это функция. В школьном курсе математики рассматривается три типовых способа задания функции: формулой, графиком и таблицей. Отметим, что это относится к числовым функциям, но другого у нас все равно нет. Наиболее популярным является задание формулой.

«Расшифровка» фразы «задать функцию формулой» основана на конкретизации эталонных моделей в составе целей: выбор языка, выбор шаблона, формирование конкретного эталонного образца. Задание функции формулой означает использование языка (обобщенных) алгебраических выражений, где обобщенность означает, что используются не только операции, включая тригонометрические, степенные, показательные и другие функции, но и частичные операции, например, логарифмическая функция, арксинус, тангенс и т. п. Шаблон задания функции формулой обычно имеет вид:

$$\begin{matrix}\text{идентификатор}\\ \text{функции}\end{matrix}\begin{pmatrix}\text{модель} & \ldots & \text{модель}\\ \text{первого операнда} & \ldots & n\text{-го операнда}\end{pmatrix} =$$

$$= \text{выражение от моделей операндов.}$$

Рассматриваемые операции «сложение» и «умножение» имеют по 2 операнда. Достаточно ли модели операнда в виде буквенного идентификатора? Мы хотим задать операции формулой, поэтому идентификатора в виде буквы будет недостаточно. Поэтому операнды надо конкретизировать. Достаточно ли указать, что это выражения от a, скажем, $f(a) + g(a)$? Но такое задание не позволяет получить конструктивную формулу, значит, надо применить модель, более подробно описывающую операнды. Одной из базовых ассоциаций с понятием «линейная оболочка системы векторов» является теорема о внутреннем задании линейной оболочки: все векторы линейной оболочки системы векторов представимы в виде линейной комбинации этих векторов. Буквами обозначим коэффициенты в разложениях. Получим для сложения:

$$u_0 + u_1a + u_2a^2 + u_3a^3 + \ldots + u_{n-1}a^{n-1} + v_0 + v_1a + v_2a^2 + v_3a^3 + \ldots + v_{n-1}a^{n-1} =$$
$$= (u_0+v_0) + (u_1+v_1)a + (u_2+v_2)a^2 + (u_3+v_3)a^3 + \ldots + (u_{n-1}+v_{n-1})a^{n-1}.$$

Аналогично получается формула для произведения с учетом, что из равенства (1) элементы a^n, a^{n+1},… выражаются через $1,a,a^2,a^3,\ldots a^{n-1}$. Полученные формулы показывают, что V замкнуто относительно операций сложения и умножения, откуда нетрудно получить, что V является полем. Если V не совпадает с Q (например, порядок меньше необходимого), то процесс можно повторить, пока не получим искомое поле.

Повторим, что работа на уровне реализации стратегий и уровне методологии является альтернативой «нарешиванию», «прорешиванию» задач, т. е. фактически «тренировке нейросети». Примером задачи методологического уровня является выделение вариантов доказательства, что угол является прямым. В результате применения описанных выше моделей и механизмов получаем три геометрических (без использования векторного и координатного методов) варианта: 1) доказать, что этот угол равен другому углу, про который известно, что он является прямым (например, провести прямую, перпендикулярную стороне угла и доказать, что она либо совпадает со второй стороной угла, либо параллельна ей); 2) доказать, что этот угол в два раза меньше развернутого угла или в 4 раза меньше полного угла; 3) разбить угол в сумму углов и показать, что сумма величин составляющих равна 90°; 4) вычислить значение синуса или косинуса этого угла.

Обучение математике есть обучение деятельности. Учитывая, что типовая учебно-математическая деятельность обычно не требует труднодоступных или сложных в обращении ресурсов, а также требующих специальных навыков средств деятельности (быть может, кроме специального программного обеспечения, например, Maxima, GAP, MathCAD), получаем, что обучение математической деятельности сводится к обучению управлению. С этой точки зрения мы считаем, что обучение математике есть обучение использованию стратегий и обучение адаптации и построению стратегий, т. е. методологии.

Как показал опыт, основная сложность обучения математической деятельности работе на уровне стратегий и, тем более, на уровне методологии, состоит в том, что студент должен одновременно следить и за формированием математического феномена, и за особенностями управления деятельностью. Грамотное разделение этих процессов требует отдельного исследования.

Заключение

1. На основе анализа научной литературы и практики обучения математике выделены основные традиционные трактовки понятия «методология».

2. Предложена модель понятия «методология математической деятельности» как *системы создания и реализации стратегий деятельности* (см. Схему 7).

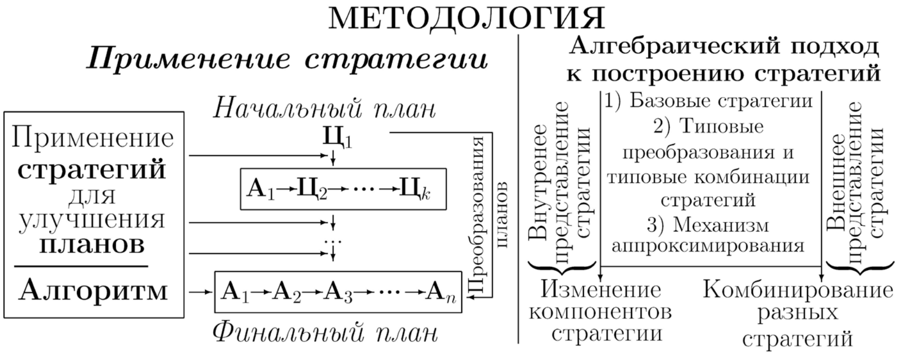

Схема 7. *Стратегия и методология как реализация алгебраического подхода к созданию стратегий деятельности*

3. Примерами применения в математической и учебно-математической деятельности проиллюстрированы основные компоненты методологии рутинной математической деятельности: a) модели реализации уже освоенных стратегий; b) система «внутренних метастратегий», т. е. стратегий формирования типовых компонентов стратегии; c) система «внешних метастратегий», т. е. стратегий комбинирования известных стратегий.

Все задачи исследования решены и цель работы «построение модели методологии рутинной математической деятельности, адаптированной к использованию в цифровой среде и применимой в практике обучения математике» достигнута.

Из многолетнего опыта применения полученных результатов мы сделали выводы об изменениях в процессе обучения и личности обучаемого, необходимые для работы на уровне реализации стратегий и на уровне методологии. Во-первых, это требует целенаправленного выращивания различных когнитивных структур, в частности, отвечающих за выделение различных аспектов рассматриваемого объекта, за восприятия процесса как предмета деятельности, за формирование и формализацию образа предмета деятельности, рассматриваемого как прототип, и формирование и формализацию интерфейса, обеспечивающего обмен информацией между прототипом и образом, когнитивных структур, необходимых для формирования комплексной, многоплановой и многоаспектной оценки адекватности модели, для выбора оптимальной модели предмета деятельности и т. д. Во-вторых, обучение работе на уровне реализации стратегий и, тем более, методологии требует изменения отношения к ошибкам. При выполнении алгоритма ошибка недопустима. При реализации стратегии совершение ошибок практически неизбежно, более того, некоторые методы предусматривают целенаправленное совершение ошибки, как, например, в методе рассуждений «от противного». Поэтому от преподавателя требуется изменение отношения к ошибкам от однозначно негативного к более взвешенному, рациональному. В-третьих, обучение управлению на уровне реализации стратегий и на уровне методологии требует формирования у обучаемого таких качеств личности, как решительность, инициатива, готовность принимать собственные решения и *нести ответственность за их последствия*, умение осуществлять многоплановый и многоаспектный анализ предмета деятельности, многоплановое и многоаспектное оценивание адекватности целей деятельности, планов, доступных ресурсов, планируемых и достигаемых результатов деятельности, готовности адаптировать деятельность к меняющимся условиям. В-четвертых, обучение управлению на уровне реализации стратегий и на уровне методологии требует корректировки содержания образования, учебно-методического обеспечения (наши учебники мы вынуждены регулярно переделывать), контрольно-измерительных материалов. Например, векторная алгебра формулируется на трех языках, которые мы назвали *векторно-геометрическим* (манипуляции с направленными отрезками), векторно-символическим (работа с выражениями вида $3\vec{u} + 5\vec{v} = \vec{w}$) и координатном языке (языке матриц-строк). Поэтому и система упражнений и задач, и система контрольных заданий должны предусматривать усвоение стратегии перевода с одного из этих языков на другой (Мельников, Соловьянов, Ширпужев, 2017) и формирование стратегий деятельности, основанных на таком переводе (см. Рисунок 2).

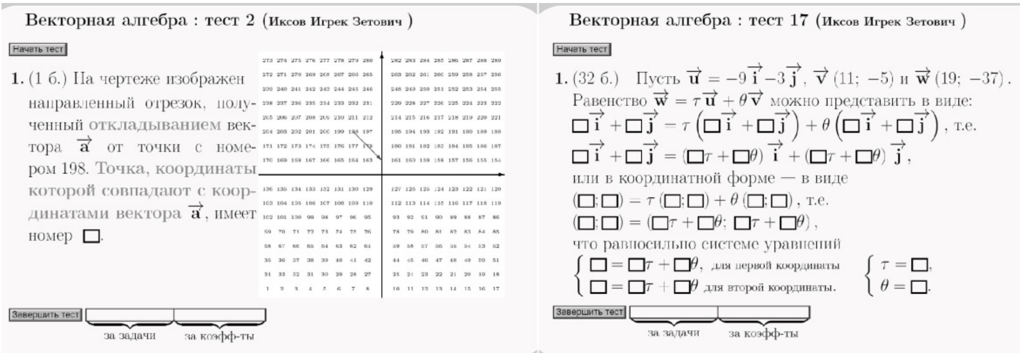

Рисунок 2. *Примеры заданий на перевод с одного математического языка на другой, сгенерированных программой, подготовленной авторами в издательской системе LaTeX с пакетом расширения acrotex*

Источники | References

1. Богданов А. А. Тектология (всеобщая организационная наука): в 2 кн. М.: Экономика. 1989a. Кн. 1.
2. Богданов А. А. Тектология (всеобщая организационная наука): в 2 кн. М.: Экономика. 1989b. Кн. 2.
3. Варанкина В. И. Учебная дисциплина «История и методология математики» для магистрантов-математиков // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 5.
4. Гильмуллин М. Ф. Вопросы методологии методики обучения истории математики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. № 13.
5. Диченко И. Г. Задачи с поиском стратегии на уроках математики // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации: материалы всероссийской научно-практической конференции, посвященной 115-летию члена-корреспондента АПН СССР П. А. Ларичева (г. Вологда, 16-17 февраля 2007 г.). Вологда: Русь, 2007.
6. Еровенко В. А. Методологическая направленность эвристических стратегий в когнитивном осмыслении математического анализа // Российский гуманитарный журнал. 2021. Т. 10. № 1. https://doi.org/10.15643/libartrus-2021.1.2
7. История и методология математики: учебное пособие / сост. И. В. Гончарова. Донецк: Донецкий государственный университет, 2017.
8. Карапетян А. Г., Маргарян А. Г. Методология математики как учение о логических аспектах математического знания // Научные вести. 2022. № 3-1 (44).
9. Клепиков В. Н., Беспрозванная Т. В. Формирование метапредметных результатов средствами проектно-исследовательской деятельности, или Зачем современной школе психолог-методолог // Вестник практической психологии образования. 2015. № 2 (43).
10. Когаловский С. Р. Понятие модели и математика // Школьные технологии. 2013. № 4.
11. Маклаков А. Г. Общая психология: учебное пособие. СПб.: Питер, 2016.
12. Мельников Ю. Б. Внешнее алгебраическое представление стратегии деятельности // e-FORUM. 2021. Т. 5. № 2 (15).
13. Мельников Ю. Б., Онохина Е. А., Шитиков С. А. Улучшение адекватности экономических моделей // Известия Уральского государственного экономического университета. 2018. Т. 19. № 1.
14. Мельников Ю. Б., Привалов С. М. Внутреннее алгебраическое представление стратегии как средство организации обучения математической деятельности // Современное образование. 2019. № 4. https://doi.org/10.25136/2409-8736.2019.4.31402
15. Мельников Ю. Б., Соловьянов В. Б., Ширпужев С. В. Стратегия перевода с одного математического языка на другой // Известия Российского государственного педагогического университета имени А. И. Герцена. 2017. № 184.
16. Мищик С. А. Педагогометрика и математическое моделирование учебной деятельности // Theoretical & Applied Science. 2014. № 6 (14).
17. Орлов А. И. О влиянии методологии на последствия принятия решений // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2017. № 125. https://doi.org/10.21515/1990-4665-125-023
18. Орлов А. И. О методологии статистических методов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 104.
19. Остапенко А. А., Янушкявичене О. Л. К вопросу о методологии обучения математике // Информация и образование: границы коммуникаций. 2011. № 3 (11).
20. Перикова Е. И., Ловягина А. Е., Бызова В. М. Эффективность метакогнитивных стратегий принятия решений в учебной деятельности // Science for Education Today. 2019. Т. 9. № 4.
21. Розин В. М. Математика: восстановление определенности (заход от методологии и культурологии) // Культура и искусство. 2019. № 5. https://doi.org/10.7256/2454-0625.2019.5.29522
22. Русанов В. В., Росляков Г. С. История и методология прикладной математики: учеб. пособие. М.: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2004.

23. Семенов Е. Е. Триада диалогов как аспект методологии диалогического познания математики // Педагогические инновации: традиции, опыт, перспективы: материалы IV международной научно-практической конференции (г. Витебск, 5 декабря 2013 г.). Витебск: Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, 2013.
24. Симанов А. Л. Постнеклассическая наука: новая математика и новая методология // Гуманитарные науки в Сибири. 1995. № 2.
25. Смирнов Е. И., Тихомиров С. А. «Проблемные зоны» и парадигма сложности в математическом образовании // Наставничество в математике и в математическом образовании: сборник трудов международной научно-практической конференции «17-е колмогоровские чтения», посвященной 120-летию со дня рождения академика А. Н. Колмогорова (г. Киров, 14-15 сентября 2023 г.). Киров: Вятский государственный университет, 2023.
26. Смирнов Е. И., Уваров А. Д., Тихомиров С. А. Проявление синергии исследования многоэтапных математико-информационных заданий на основе метода параметризации // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2024. № 1 (33).
27. Сухотин А. М., Тарбокова Т. В. Высшая математика. Альтернативная методология преподавания: учебное пособие. М.: Юрайт, 2020.
28. Тестов В. А. Красота в математическом образовании: синергетическое мировидение // Образование и наука. 2019. Т. 21. № 2. https://doi.org/10.17853/1994-5639-2019-2-9-26
29. Тестов В. А. Стратегия обучения в современных условиях // Педагогика. 2005. № 7.
30. Федоров Б. И. Б. Больцано как логик и методолог науки // Логико-философские штудии. 2011. № 9.
31. Шабанова М. В. Методология учебного познания как цель изучения математики: монография. Архангельск: Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2004.
32. Шадриков В. Д. Возвращение души: теоретические основания и методология психологической науки. М.: Институт психологии РАН, 2021. https://doi.org/10.38098/mng_21_0436
33. Шило Н. Г. Основные направления методологии математики // Математика и математическое образование: сборник трудов IX международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (г. Тольятти, 24-26 апреля 2019 г.). Тольятти: Тольяттинский государственный университет, 2019.
34. Эседова Г. С., Гаджимахадова Л. М. Математическое моделирование уровня мотивации учебной деятельности студентов // Мухтаровские чтения: актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы: сборник трудов международной научной конференции, посвященной 50-летию ДГТУ (г. Махачкала, 22-23 апреля 2022 г.). Махачкала: ФОРМАТ, 2022.
35. Bertalanffy L. von. General System Theory: Foundations, Development, Applications. 1st ed. N. Y.: George Braziller, Inc., 1968.
36. Burgueno R., Sicilia A., Alcaraz-Ibanez M., Lirola M. J., Medina-Casaubón J. Effects of Teaching Goal Content and Academic Behavioural Regulation on the Beliefs of Teaching Efficacy in Pre-service Teachers // Educacion XXI. 2020. Vol. 23. No. 1.
37. Cocieru O. C., Katz M., McDonald M. A. Understanding Interactions in a Classroom-As-Organization Using Dynamic Network Analysis // Journal of Experiential Education. 2019. Vol. 43. No. 2. https://doi.org/10.1177/1053825919888778
38. Melnikov Yu. B. Modeling Theory Based on the Formal-Constructive Interpretation of the Model // Data Science and Intelligent Systems.CoMeSySo 2021 / ed. by R. Silhavy, P. Silhavy, Z. Prokopova. Cham: Springer, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90321-3_51

Информация об авторах | Author information

RU

Мельников Юрий Борисович[1], к. физ.-мат. н., доц.
Кныш Алла Александровна[2]
[1] Уральский государственный горный университет, г. Екатеринбург;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
[2] Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

EN

Yury Borisovich Melnikov[1], PhD
Alla Aleksandrovna Knysh[2]
[1] Ural State Mining University, Ekaterinburg;
Ural Federal University, Ekaterinburg
[2] Ural State University of Economics, Ekaterinburg;
Ural Federal University, Ekaterinburg

[1] *yu.b.melnikov@yandex.ru,* [2] *knyshalla84@gmail.com*

Информация о статье | About this article

Дата поступления рукописи (received): 01.07.2024; опубликовано online (published online): 11.10.2024.

Ключевые слова (keywords): алгоритм деятельности; стратегия деятельности; методология рутинной математической деятельности; план деятельности; цель деятельности; activity algorithm; activity strategy; methodology of routine mathematical activity; activity plan; activity goal.