применять такой подход к обучению грамматической стороне речи, который повысит эффективность усвоения грамматической системы языка и способность к коммуникации на иностранном языке.

В обучении грамматике традиционно определились два подхода - имплицитный и эксплицитный. В первом случае акцент делается на обучение грамматике без объяснения правил, а во втором - наоборот. В каждом из этих подходов сформировались по два метода: в имплицитном - структурный и коммуникативный методы, а в эксплицитном - дедуктивный и индуктивный. Но наиболее распространенным подходом в настоящее время является дифференцированный подход. Он позволяет сочетать различные подходы и методы с учётом особенностей обучения.

Список литературы

1. **Ляховицкий М. В.** Методика обучения иностранным языкам. М., 1981.
2. **Миролюбов А. А., Парахина А. В.** Общая методика преподавания иностранных языков. М., 1996.
3. **Функ Х., Кент М.** Учить и учиться грамматике. М., 1994.
4. **Штелинг Д. А.** Грамматическая семантика английского языка. М., 1996.

УДК 33
Экономические науки

В настоящее время для прогноза экономических показателей в эконометрике недостаточно используются нелинейные процессы авторегрессии. Одной из главных причин этого является отсутствие методов определения стационарности (устойчивости) этих процессов. Рассматриваемый в предлагаемой статье новый метод определения стационарности (устойчивости) решает данную проблему. Он основан на теории устойчивости великого русского математика А. М. Ляпунова.

Ключевые слова и фразы: теория устойчивости; первый метод Ляпунова; прямой метод Ляпунова; второй метод Ляпунова; функции Ляпунова; голоморфная функция; нелинейная авторегрессия.

Владимир Калинникович Легкоконец
Кафедра математических и естественно-научных дисциплин
Институт управления, бизнеса и права, г. Пятигорск
vladimirlegkokonec@bk.ru

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОСТИ (УСТОЙЧИВОСТИ) СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ©

Введение

Предлагаемый метод определения стационарности (устойчивости) нелинейного процесса авторегрессии основан на теории устойчивости А. М. Ляпунова, распространенной на разностные уравнения и системы разностных уравнений. Его можно использовать при прогнозировании экономических показателей в эконометрике, а также для управления технологическими процессами в химической, металлургической промышленности и электроэнергетике. Он также может быть использован для описания динамики численности популяций в биологии и экологии.

В предлагаемой статье рассматривается и другой метод определения стационарности (устойчивости) нелинейного процесса авторегрессии. Он основан на принципе сжатых отображений. Этот метод проще, но он имеет значительно более узкую область применения. Оба эти метода в эконометрике раньше не применялись.

Рассмотрим стохастический нелинейный процесс авторегрессии:

$$y_t = F(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}) + \varepsilon_t \tag{1}$$

Здесь (1) - нелинейное стохастическое разностное уравнение. Стохастический линейный процесс авторегрессии является частным случаем нелинейного процесса авторегрессии:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} .. + .. \beta_p y_{t-p} + \varepsilon_t , \tag{2}$$

где (2) - стохастическое линейное разностное уравнение.

Биологи и экологи используют только разностное уравнение:

$$y_t = F(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}) \tag{3}$$

Здесь y_t, y_{t-1}, y_{t-2},….. y_{t-p} - значения временного ряда, p - порядок авторегрессии, $\beta_1, \beta_{t-1}, .\beta_{t-2}, ...\beta_p$ - коэффициенты линейного процесса авторегрессии, а ε_t - так называемый «белый шум». Он является случайным процессом, имеющим математическое ожидание 0 и дисперсию δ^2. Функция $F(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$ предполагается голоморфной.

Функция $F(y)$ голоморфна в точке y_0, если она в окрестности этой точки разлагается в ряд Тейлора.

Здесь: $y = (y_{t-1}, y_{t-2}, .., y_{t-p})$, $y^0 = (y^0_{t-1}, y^0_{t-2}, ..y^0_{t-p})$.

Почти все зависимости между экономическими показателями, которые используются на практике, выражаются голоморфными функциями.

Предлагаемый метод определения стационарности (устойчивости) универсален. Он применим и к процессу линейной авторегрессии. Докажем, в первую очередь, универсальность предлагаемого метода.

Затем рассмотрим применение этого метода, а также метода, основанного на принципе сжатых отображений, для определения стационарности (устойчивости) нелинейного процесса авторегрессии.

В конце статьи рассмотрим конкретные практические примеры нелинейных авторегрессий, а также нелинейных разностных уравнений.

Определение стационарности (устойчивости) стохастического процесса линейной авторегрессии

Представим стохастическое разностное уравнение (2) в форме векторного уравнения первого порядка. Введем обозначения:

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ . \\ y_{t-p+1} \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 .....\beta_{p-1} & \beta_p \\ 1 \ \ 0 \ \ 0 & & ......0 & 0 \\ 0 \ \ 1 \ \ 0 & & ......0 & 0 \\ .... \\ .... \\ 0 \ \ 0 \ \ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Собственные числа матрицы B являются корнями уравнения $|B+\lambda I|=0$, где I - единичный столбец порядка p.

Определитель $|B+\lambda I| = \begin{vmatrix} \beta_1+\lambda & \beta_2 & \beta_3.....\beta_{p-1} & \beta_p \\ 1 & \lambda.....0.......0 & & 0 \\ 0 & 1......\lambda......0 & & 0 \\ .... \\ .... \\ 0 & 0 \ \ ....0....\lambda & & 0 \\ 0 & 0 \ \ ....0.... & & \lambda \end{vmatrix}$

легко вычислить последовательно, прибавляя к каждому $(i+1)$-му столбцу i-й столбец, предварительно умноженный на λ, $i=1, \ldots, p-1$. При этом получим

$$\begin{vmatrix} \beta_1+\lambda & \beta_2+\beta_1\lambda+\lambda^2 & ...\beta_p+\lambda\beta_{p-1}+....+\lambda^{p-1}\beta_1+\lambda^p \\ 1 & 0.......... & 0 \\ 0 & 1.......... & 0 \\ .... \\ .... \\ .... \\ 0 & 0......... & 0 \\ 0 & 0......... & 0 \end{vmatrix} = \beta_p+\lambda\beta_{p-1}+\ldots+\lambda^{p-1}\beta_1+\lambda^p,$$

а это и есть характеристический полином стохастического разностного уравнения (2). Поскольку предполагается, что все корни этого полинома лежат в единичном круге, то такими же будут характеристические числа матрицы B. В этом случае линейный процесс авторегрессии (2) стационарен (устойчив). Таким образом, линейный процесс авторегрессии (2) можно представить в виде системы линейных разностных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов:

$$Y_t = BY_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (5)$$

Для определения устойчивости этой системы воспользуемся следующими теоремами для системы линейных разностных уравнений:

1. Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы B по модулю меньше единицы.

2. Система неустойчива, если хотя бы одно собственное число матрицы B по модулю больше 1.

Если некоторые характеристические числа матрицы по модулю равны 1, необходимо преобразовать значения временного ряда y_t, используя оператор $\nabla^d y_t$. Для d=1, $\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$, если d=2, то $\nabla^2 y_t = y_t - 2\,y_{t-1} + y_{t-2}$.

В общем случае для произвольного d можно записать:

$$\nabla^d y_t = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-j} \begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix} y_t \text{, где } \begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix} = C_j^d = \frac{j!}{d!(j-d)!}.$$

Более подробно об этих преобразованиях написано в монографии [3].

Если порядок авторегрессии больше или равен трем, то целесообразно не находить собственные числа матрицы B, а определять расположение этих характеристических чисел относительно единичного круга. Для этого необходимо воспользоваться теоремами Шура-Кона, Раусса-Гурвица и Льенара-Шипара. Подробно эти методы описаны в статье [12]. Таким образом, применение к процессу линейной авторегрессии первого метода Ляпунова, распространенного на разностные уравнения и системы разностных уравнений, дает те же результаты, что и классическая теория временных рядов [3].

Определение стационарности (устойчивости) стохастического процесса нелинейной авторегрессии и нелинейных разностных уравнений

Введем обозначения $n = p$, $y_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}) = X = (X_1, ..., X_n)$, а $y^0 = (y_{t-1}^0, y_{t-2}^0, .. y_{t-p}^0) = X^{(0)} = (X_1^{(0)}, .., X_n^{(0)})$. Предположим, что в стохастическом разностном уравнении нелинейной авторегрессии (1) и разностном уравнении (3) функция $F(X)$ является голоморфной. Эту функцию можно разложить в ряд Тейлора в некоторых окрестностях точек $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, .., X_n^{(0)})$, которые удовлетворяют уравнению $F(X_1^{(0)}, .., X_n^{(0)})$=0 . Для этого воспользуемся формулой разложения в ряд Тейлора функции многих переменных. Введем предварительно следующие обозначения:

$$K = (K_1, K_2, ...K_n),\ |K| = K_1 + ... + K_n,\ K! = K_1! + ... + K_n!,$$

$$F^{(K)} = \frac{\partial^{|K|} F}{\partial X_1^{K_1} \partial X_2^{K_2} ... \partial X_n^{K_n}},\ (X - X^{(0)})^K = (X_1 - X_1^{(0)})^{K_1} .....(X_n - X_n^{(0)})^{K_n}.$$

Здесь $K = (K_1, K_2, ...K_n)$ называется мультииндексом.

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n),\ X^{(0)} = (X_1^{(0)}, .., X_n^{(0)}),$$

$$X^0 + \theta(X - X^{(0)}) = (X_1^0 + \theta(X_1 - X_1^{(0)}), ..., X_n^{(0)} + \theta(X_1 - X_n^{(0)}).$$

Используя данные обозначения, запишем формулу разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, ..., X_n^{(0)})$ n-мерного пространства для функции многих переменных:

$$F(X) = \sum_{|K<M|} \frac{\partial^{|K|} F}{\partial X_1^{K_1} \partial X_2^{K_2} .... \partial X_n^{K_n}} \left(X - X^{(0)} \right)^K + \sum_{|K|=M} \frac{F^{(K)}(X^{(0)} + \theta(X - X^{(0)}))}{K!} \left(X - X^{(0)} \right)^K \qquad (6)$$

Определим для рассматриваемой функции все члены ряда Тейлора первого порядка:

$$F(y_{t-1}^0, y_{t-2}^0, .., y_{t-p}^0) + \sum_{j=1}^{p} y_{t-j} \frac{\partial F(y_{t-1}^0, y_{t-2}^0, .., y_{t-p}^0)}{\partial y_{t-j}} \qquad (7)$$

Введем обозначения:

$$a_1 = \sum_{j=1}^{p} y_{t-1} \frac{\partial F(y_{t-1}^0, y_{t-2}^0, .., y_{t-p}^0)}{\partial y_{t-1}},\ a_2 = \sum_{j=1}^{p} y_{t-2} \frac{\partial F(y_{t-1}^0, y_{t-2}^0, .., y_{t-p}^0)}{\partial y_{t-2}},\ ......,\ a_p = \sum_{j=1}^{p} y_{t-p} \frac{\partial F(y_{t-1}^0, y_{t-2}^0, .., y_{t-p}^0)}{\partial y_{t-p}}.$$

Сумму всех членов разложения в ряд Тейлора второго порядка и выше обозначим как $s(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} .... y_{t-p})$. Таким образом, данную задачу можно представить в виде:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} ... + ... a_p y_{t-p} + s(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} .... y_{t-p}) \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 .... a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & 0 \; ....0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \; ....0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \; ......1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

$$S_t = \begin{pmatrix} s(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} .... y_{t-p}) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассуждая, как и в случае линейной авторегрессии, получим:

$$Y_t = AY_{t-1} + S_t + U_t \qquad (10)$$

Так как $s(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} .... y_{t-p})$ - это сумма всех членов разложения в ряд Тейлора второго порядка и выше, то достаточно ограничиться устойчивостью по первому приближению и рассмотреть устойчивость системы $Y_t = AY_{t-1}$, точно так же как и для случая линейной авторегрессии. Здесь, как и для случая линейной авторегрессии, возможны три случая:

1. Все характеристические числа матрицы A по модулю меньше 1. Тогда данный процесс нелинейной авторегрессии является стационарным (устойчивым).

2. Хотя бы одно характеристическое число матрицы по модулю больше 1. В этом случае процесс нелинейной авторегрессии не стационарен (не устойчив).

3. Если среди характеристических чисел матрицы имеются по модулю равные единице, то вопрос требует дополнительного анализа. Этот случай называется критическим.

Как и в случае линейной авторегрессии, если порядок авторегрессии больше двух, целесообразно не находить собственные числа матрицы A, а определять расположение этих характеристических чисел относительно единичного круга. Для этого используются теоремы Шура-Кона, Раусса-Гурвица и Льенара-Шипара. Эти методы подробно описаны в статье [12].

Для первых двух случаев, как и для случая линейной регрессии, необходимо применять первый метод А. М. Ляпунова. Он значительно более удобен для применения и намного чаще применяется на практике. Для третьего случая задача решается просто, если $s(y_{t-j})$ является функцией одного переменного.

3а. В этом случае сумма членов второго и выше порядков разложения в ряд Тейлора имеет вид:

$$s(y_{t-j}) = g_1 y_{t-j}^m + g_2 y_{t-j}^{m+1} + \dots,$$

где $m \geq 2$, $g_1, g_2 .....$ - некоторые постоянные. В данном частном случае задача устойчивости решается сразу. Если число m является четным, то процесс нелинейной авторегрессии не стационарен (не устойчив). Если m - число нечетное, то в случае $g < 0$ процесс нелинейной авторегрессии стационарен (устойчив), а в случае $g > 0$ - наоборот. Второй метод А. М. Ляпунова используется в третьем случае, если $s(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} .... y_{t-p})$ является функцией нескольких переменных. Его называют прямым методом Ляпунова. Он заключается в построении функций Ляпунова. А. М. Ляпунов разработал метод построения этих функций для дифференциальных уравнений. Украинские математики К. Г. Валеев, Г. С. Финин разработали теорию построения функций Ляпунова в критических случаях для нелинейных разностных уравнений и их систем. Эта теория полностью подходит для определения стационарности (устойчивости) в критических случаях процесса нелинейной авторегрессии (1) или нелинейного разностного уравнения (3). Ограниченный объем данной статьи не позволяет привести в ней эту теорию. Она подробно описана в монографии [4]. Если порядок процесса нелинейной авторегрессии больше двух, то определение стационарности (устойчивости) в критическом случае требует большого числа алгебраических преобразований, которые трудно реализовать вручную. Поэтому возникает необходимость реализации программы на ПЭВМ, которая решает следующие вопросы:

А. Определять расположение собственных чисел относительно единичного круга. Если критических случаев нет, тогда определять устойчивость.

Б. В критических случаях автоматически строить функции Ляпунова, а также на их основании определять стационарность (устойчивость).

Если в дальнейшем будет создан программный комплекс, полностью автоматизирующий работу с процессом нелинейной авторегрессии, то данную программу можно в него включить.

Прямой метод Ляпунова заключается в построении функций Ляпунова. Сформулируем основные теоремы прямого метода Ляпунова для разностных уравнений и систем разностных уравнений.

Обозначим функцию Ляпунова для разностного уравнения или системы разностных уравнений как $V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$. Аналогом производной этой функции ΔV функции V является приращение, вычисляемое по формуле:

$$\Delta V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}) = V(F(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})) - V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}).$$

Теорема I. Если для разностного уравнения или системы разностных уравнений существует знакоопределенная функция $V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}))$, такая, что $\Delta V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$ есть функция знакопостоянная, знака, противоположного знаку V, или тождественно обращается в нуль, то нулевое решение рассматриваемого уравнения или системы устойчиво.

Теорема II. Если для разностного уравнения или системы разностных уравнений существует знакоопределенная функция $V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$, такая, что $\Delta V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$ есть функция знакоопределенная, знака, противоположного V, то нулевое решение рассматриваемого уравнения или системы устойчиво асимптотически.

Теорема III. Если для разностного уравнения или системы разностных уравнений существует функция $V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$, такая, что $\Delta V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$ есть функция знакоопределенная, а сама функция $V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$ не будет знакопостоянной, знака, противоположного с $\Delta V(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$, то решение рассматриваемого уравнения или системы неустойчиво.

Определение стационарности (устойчивости) с помощью принципа сжатых отображений

Отображение, реализуемое разностным уравнением (3), является сжимающим, если определитель якобиана D этой системы меньше единицы. Если в рассматриваемой стационарной точке отображение сжимающее, то решение системы вблизи этой точки устойчиво. Область применения данного метода значительно уже, чем у метода, основанного на теории устойчивости А. М. Ляпунова, но иногда с его помощью проще определить стационарность (устойчивость).

Примеры определения стационарности (устойчивости) процессов нелинейной авторегрессии и нелинейных разностных уравнений, используемых в биологии и экологии

Рассмотрим примеры определения стационарности (устойчивости) процессов нелинейной авторегрессии, а также устойчивости нелинейных разностных уравнений, которые использовались на практике.

I. Определение стационарности нелинейного процесса авторегрессии

$$y_t = (\alpha + \beta \exp(-\gamma y_{t-1}^2)) y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \alpha, \beta, \gamma > 0 \tag{11}$$

взятого из статьи [9]. Здесь $\exp$ обозначает экспоненту.

Отсюда $F(y_{t-1}) = (\alpha + \beta \exp(-\gamma y_{t-1}^2)) y_{t-1}$. Эта функция обращается в нуль, только если $y_{t-1} = 0$. Разложим функцию $F(y_{t-1})$ в ряд Тейлора в точке 0.

Раскрывая скобки, получим:

$$F(y_{t-1}) = \alpha y_{t-1} + \beta y_{t-1} \exp(-\gamma y_{t-1}^2),$$

$$\beta y_{t-1} \exp(-\gamma y_{t-1}^2) = \beta y_{t-1} (1 - \gamma \frac{y_{t-1}^2}{1!} + \gamma^2 \frac{y_{t-1}^4}{2!} - ... + (-1)^n \gamma^n \frac{y_{t-1}^{2n}}{n!} + ...)$$

или

$$\beta y_{t-1} \exp(-\gamma y_{t-1}^2) = \beta y_{t-1} - \beta\gamma \frac{y_{t-1}^3}{1!} + \beta\gamma^2 \frac{y_{t-1}^5}{2!} - ... + (-1)^n \beta\gamma^n \frac{y_{t-1}^{2n+1}}{n!} + ...$$

Окончательно получим:

$$F(y_{t-1}) = (\alpha + \beta) y_{t-1} - \beta\gamma \frac{y_{t-1}^3}{1!} + \beta\gamma^2 \frac{y_{t-1}^5}{2!} - ... + (-1)^n \beta\gamma^n \frac{y_{t-1}^{2n+1}}{n!} + ...,$$

функция $s(y_{t-1}) = -\beta\gamma \frac{y_{t-1}^3}{1!} + \beta\gamma^2 \frac{y_{t-1}^5}{2!} - ... + (-1)^n \beta\gamma^n \frac{y_{t-1}^{2n+1}}{n!} + ...$

Так как функция $s(y_{t-1})$ представляет сумму членов разложения в ряд Тейлора в точке 0 выше второго порядка, то можно оценить устойчивость по первому приближению. Отсюда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_t = (\alpha + \beta) y_{t-1} + 0 * y_{t-2} + s(y_{t-1}) + \varepsilon_t \\ y_{t-1} = y_{t-1} + 0 * y_{t-2} \end{cases}$$

Перепишем данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta) & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных чисел этой матрицы:

$$\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)-\lambda & 0\\ 1 & 0-\lambda\end{pmatrix}=((\alpha+\beta)-\lambda)\times(-\lambda)-0\times1=0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\alpha+\beta$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда стационарность (устойчивость) рассматриваемого процесса нелинейной авторегрессии зависит от суммы коэффициента $\alpha+\beta$. Если $\alpha+\beta$ <1, то данный рассматриваемый процесс стационарен (устойчив). При $\alpha+\beta$ >1 рассматриваемый процесс не стационарен (не устойчив). Случай $\alpha+\beta$ =1 рассматривается отдельно. Первым членом разложения в ряд Тейлора функции $s(y_{t-1})$ является $-\beta\gamma y_{t-1}^3$, где y_{t-1} возводится в нечетную степень, а коэффициент перед первым членом является отрицательным, отсюда следует на основании (3а) устойчивость нелинейного процесса авторегрессии (11) при $\alpha+\beta$ =1. Окончательно получим: процесс нелинейной авторегрессии (11) устойчив при $\alpha+\beta\le1$ и неустойчив, если $\alpha+\beta$ >1 в окрестности точки 0.

II. В статье [11] используется следующий процесс нелинейной авторегрессии:

$$y_t=5+\exp(-\frac{y_{t-1}}{2}) \tag{12}$$

Для определения устойчивости данного процесса воспользуемся принципом сжатых отображений. Найдем производную от функции:

$$F(y_{t-1})=5+\exp(-\frac{y_{t-1}}{2}),\ (F(y_{t-1}))'=(5+\exp(-\frac{y_{t-1}}{2}))'=-\frac{1}{2}\exp(-\frac{y_{t-1}}{2})$$

Значения временного ряда y_t, y_{t-1} - это экономические показатели, которые по смыслу задачи всегда положительны. Поэтому $\det D=\left|-\frac{1}{2}\exp(-\frac{y_{t-1}}{2})\right|<1$

для любого значения y_{t-1}. Отсюда, на основании принципа сжатых отображений, следует устойчивость рассматриваемого процесса нелинейной авторегрессии (12) в окрестности любой точки y_{t-1}.

III. Рассмотрим нелинейное разностное уравнение:

$$y_t=\beta_1 y_{t-1}(1-y_{t-1}) \tag{13}$$

В этом уравнении величина y меняется от 0 до 1, а β_1 - от 0 до 4. У экологов и биологов это дискретный аналог модели Ферхюльста-Пирла. Функция $F(y_{t-1})=\beta_1 y_{t-1}(1-y_{t-1})$ обращается в нуль в точках 0 и 1. Разложим $F(y_{t-1})$ в окрестности точки 0 в ряд Тейлора по формуле:

$$F(y_{t-1})=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}y_{t-1}+\frac{F''(0)}{2!}y_{t-1}^2+....+\frac{F^{(n)}(0)}{2!}y_{t-1}^n,$$

$$(F(y_{t-1}))'=(\beta_1 y_{t-1}(1-y_{t-1}))'=\beta_1-2\beta_1 y_{t-1},$$

$$(F(y_{t-1}))''=(\beta_1 y_{t-1}(1-y_{t-1}))''=-2\beta_1,\ (F(y_{t-1}))'''=(\beta_1 y_{t-1}(1-y_{t-1}))'''=0,$$

………………………

$$(F(y_{t-1}))^{(n)}=(\beta_1 y_{t-1}(1-y_{t-1}))^{(n)}=0,$$

$$F'(0)=\beta_1,\ F''(0)=-2\beta_1,\ F'''(0)=0,\dots\dots,\ F^{(n)}(0)=0.$$

Отсюда $F(y_{t-1})=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}y_{t-1}+\frac{F''(0)}{2!}y_{t-1}^2+....+\frac{F^{(n)}(0)}{2!}y_{t-1}^n=\beta_1 y_{t-1}-\beta y_{t-1}{}^2$.

На основании разложения $F(y_{t-1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки 0 получим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{cases}y_t=\beta_1 y_{t-1}+0*y_{t-2}-\beta y_{t-1}{}^2\\ y_{t-1}=y_{t-1}+0*y_{t-2}\end{cases} \tag{14}$$

Перепишем данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}y_t\\ y_{t-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_{t-1}\\ y_{t-2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta y_{t-1}^2\\ 0\end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных чисел этой матрицы:

$$\begin{pmatrix}\beta_1-\gamma & 0\\ 1 & 0-\lambda\end{pmatrix}=(\beta_1-\lambda)\times(-\lambda)-0\times 1=0$$

Это алгебраическое уравнение имеет два корня $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\beta_1$. Его корни являются характеристическими числами матрицы A. Отсюда устойчивость рассматриваемого нелинейного разностного уравнения зависит от коэффициента β_1. Если β_1<1, то данное уравнение устойчиво. При β_1>1 рассматриваемое уравнение не устойчиво. Случай β_1=1 рассматривается отдельно. Так как в нашем случае $s(y_{t-1})=-\beta_1 y_{t-1}^2$ является функцией одной переменной и y_{t-1} возводится в четную степень, то на основании (3а) следует, что при β_1=1 рассматриваемое уравнение неустойчиво. Окончательно получим: нелинейное разностное уравнение (13) устойчиво при β_1<1 и неустойчиво при $\beta_1 \geq 1$ в окрестности точки 0.

Разложим $F(y_{t-1})$ в окрестности точки 1 в ряд Тейлора по формуле:

$$F(y_t)=F(1)+\frac{F'(1)}{1!}(y_{t-1}-1)+\frac{F''(1)}{2!}(y_{t-1}-1)^2+....+\frac{F^{(n)}(1)}{2!}(y_{t-1}-1)^n$$

$F'(1)=-\beta_1$, $F''(1)$=-2 β_1, $F'''(1)$=0,……, $F^{(n)}(1)$=0

Отсюда следует:

$$F(1)+\frac{F'(1)}{1!}(y_{t-1}-1)+\frac{F''(1)}{2!}(y_{t-1}-1)^2+....+\frac{F^{(n)}(1)}{2!}(y_{t-1}-1)^n=-\beta_1\ (y_{t-1}-1)\text{ - }\beta_1\ (y_{t-1}-1)^2$$

или $F(1)+\frac{F'(1)}{1!}(y_{t-1}-1)+\frac{F''(1)}{2!}(y_{t-1}-1)^2+....+\frac{F^{(n)}(1)}{2!}(y_{t-1}-1)^n=\beta_1\ y_{t-1}-\beta_1 y_{t-1}^2$

На основании разложения $F(y_{t-1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки 1 получим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_t=\beta_1 y_{t-1}+0*y_{t-2}-\beta y_{t-1}{}^2\\ y_{t-1}=y_{t-1}+0*y_{t-2}\end{cases}$$

Эта система полностью совпадает с (14) для случая разложения в окрестности точки 0. Отсюда следует, что если β_1<1, то нелинейное разностное уравнение (13) устойчиво, а при $\beta_1 \geq 1$ - не устойчиво в окрестности точки 1.

IV. Рассмотрим нелинейное разностное уравнение:

$$y_t=\frac{a_1 y_{t-1}}{1+\beta_1 y_{t-1}} \qquad (15)$$

Оно называется уравнением Пьелу и используется в биологии и экологии. Функция $F(y_{t-1})=\frac{a_1 y_{t-1}}{1+\beta_1 y_{t-1}}$ обращается в нуль при $y_{t-1}=0$. Разложим данную функцию в ряд Тейлора в окрестности точки нуль. Учитывая, что $\frac{1}{1+\beta_1 y_{t-1}}=1-\beta_1 y_{t-1}+(\beta_1 y_{t-1})^2-(\beta_1 y_{t-1})^3+........+$, получим:

$$\frac{a_1 y_{t-1}}{1+\beta_1 y_{t-1}}=a_1 y_{t-1}(1-\beta_1 y_{t-1}+(\beta_1 y_{t-1})^2-(\beta_1 y_{t-1})^3+......)$$

или

$$\frac{a_1 y_{t-1}}{1+\beta_1 y_{t-1}}=a_1 y_{t-1}-a_1\beta_1 y_{t-1}{}^2+a_1\beta_1^2 y_{t-1}{}^3-a_1\beta_1^3 y_{t-1}{}^4+...... .$$

Отсюда следует:

$$y_t=a_1 y_{t-1}-a_1\beta_1 y_{t-1}{}^2+a_1\beta_1^2 y_{t-1}{}^3-a_1\beta_1^3 y_{t-1}{}^4+...... .$$

Отсюда функция $s(y_{t-1},y_{t-2},......,y_{t-p})=-a_1\beta_1 y_{t-1}{}^2+a_1\beta_1^2 y_{t-1}{}^3-a_1\beta_1^3 y_{t-1}{}^4+....$

Из разложения в ряд Тейлора следует система уравнений:

$$\begin{cases} y_t=\alpha_1 y_{t-1}+0*y_{t-2}+s(y_{t-1})\\ y_{t-1}=y_{t-1}+0*y_{t-2}\end{cases}$$

Представим данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных чисел этой матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha_1 - \lambda) \times (-\lambda) - 0 \times 1 = 0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \alpha_1$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда устойчивость рассматриваемого процесса нелинейного разностного уравнения зависит от коэффициента α_1. Если $|\alpha_1|$<1, то данный рассматриваемый процесс устойчив. При $|\alpha_1|$>1 рассматриваемый процесс не устойчив. Случай $|\alpha_1|$=1 рассматривается отдельно. Первым членом разложения в ряд Тейлора функции $s(y_{t-1})$ является $-\alpha_1\beta_1 y_{t-1}^2$, где y_{t-1} возводится в четную степень, на основании (3а) следует, что при α_1=1 рассматриваемое разностное уравнение (15) неустойчиво. Окончательно получим: нелинейное разностное уравнение (15) устойчиво, если $|\alpha_1|$=1, и не устойчиво при $|\alpha_1| \geq 1$ в окрестности точки 0.

V. Рассмотрим нелинейную модель Рикера для рыбных популяций:

$$y_t = y_{t-1} \exp\left\{\gamma\left(1 - \frac{y_{t-1}}{K}\right)\right\} \tag{16}$$

Здесь $\exp$ обозначает экспоненту. Функция $F(y_{t-1})$ обращается в нуль, если y_{t-1}=0. Преобразуем данную модель: $y_t = y_{t-1} \exp\left(\gamma - \frac{\gamma y_{t-1}}{K}\right) = y_{t-1} \exp\gamma \exp\left(-\frac{\gamma y_{t-1}}{K}\right)$.

Разложим $\exp\left(-\frac{\gamma y_{t-1}}{K}\right)$ в точке 0 в ряд Тейлора. В результате получим:

$$\exp\left(-\frac{\gamma y_{t-1}}{K}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{\frac{\gamma}{K} y_{t-1}}{1!} + \frac{\left(\frac{\gamma}{K} y_{t-1}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{\gamma}{K} y_{t-1}\right)^3}{3!} + \ldots..(-1)^k \frac{\left(\frac{\gamma}{K} y_{t-1}\right)^k}{k!}$$

Отсюда получим разложение в точке 0 для $F(y_{t-1}) = y_{t-1} \exp\gamma \exp\left(-\frac{\gamma y_{t-1}}{K}\right) =$

$$\frac{y_{t-1}\exp\gamma}{0!} - \frac{\exp\gamma \frac{\gamma}{K} y_{t-1}{}^2}{1!} + \frac{\exp\gamma \left(\frac{\gamma}{K}\right)^2 y_{t-1}{}^3}{2!} - + \ldots..(-1)^k \frac{\exp\gamma\left(\frac{\gamma}{K}\right)^k y_{t-1}{}^{k+1}}{k!}.$$ Отсюда:

$$s(y_{t=1}) = -\frac{\exp\gamma \frac{\gamma}{K} y_{t-1}{}^2}{1!} + \frac{\exp\gamma \left(\frac{\gamma}{K}\right)^2 y_{t-1}{}^3}{2!} - + \ldots..(-1)^k \frac{\exp\gamma\left(\frac{\gamma}{K}\right)^k y_{t-1}{}^{k+1}}{k!}.$$

На основании разложения $F(y_{t-1})$ в ряд Тейлора в окрестности точки 0 получим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_t = \exp\gamma * y_{t-1} + 0 * y_{t-2} + s(y_{t-1})_t \\ y_{t-1} = y_{t-1} + 0 * y_{t-2} \end{cases}$$

Представим данную систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\gamma & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s(y_{t-1}) \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа матрицы $A = \begin{pmatrix} \exp\gamma & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Составим уравнение для нахождения собственных чисел этой матрицы:

$$\begin{pmatrix} \exp\gamma - \lambda & 0 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (\exp\gamma - \lambda) \times (-\lambda) - 0 \times 1 = 0$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \exp\gamma$. Его корни являются собственными числами матрицы A. Отсюда устойчивость рассматриваемого процесса нелинейной авторегрессии зависит от коэффициента γ. Если $\exp\gamma$ <1, то рассматриваемое нелинейное разностное уравнение (16) устойчиво. При $\exp\gamma$ >1 это уравнение не устойчиво. Случай $\exp\gamma$ =1 рассматривается отдельно. Первым членом разложения в ряд Тейлора функции $s(y_{t-1})$ является $-\exp\gamma \frac{\gamma}{K} y_{t-1}{}^2$, где y_{t-1} возводится в четную степень, на основании (3а) следует, что при $\exp\gamma$ =1 рассматриваемое разностное уравнение (16) неустойчиво. Окончательно получим, что при γ <0 рассматриваемое разностное уравнение (16) устойчиво, а при $\gamma \geq 0$ - неустойчиво в окрестности точки 0.

Заключение

В данной работе решена задача определения стационарности процесса нелинейной авторегрессии в предположении, что функция $F(y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p})$ является голоморфной. Это позволяет решать широкий круг практических задач, в которых используется нелинейная авторегрессия. При выполнении прогноза с помощью нелинейной авторегрессии возможно возникновение бифуркаций и хаоса. Эти вопросы будут рассмотрены в следующих статьях с помощью методов символической динамики.

Список литературы

1. **Барбашин Е. А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
2. **Барбашин Е. А.** Построение функций Ляпунова. М.: Наука, 1970.
3. **Бокс Дж., Джекинс Г.** Анализ временных рядов: прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
4. **Валеев К. Г., Финин Г. С.** Построение функций Ляпунова. Киев: Наукова думка, 1981.
5. **Валентинов В. А.** Эконометрика: учебник. 2-е изд. М.: ИТК «Дашков и К^0», 2010.
6. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966.
7. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. Т. 1.
8. **Демидович Е. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1966.
9. **Ицхоки О.** Выбор модели и парадоксы прогнозирования // Квантиль. 2006. № 1.
10. **Канторович А. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
11. **Кошкин Г. М., Лаходынов В. С.** Полурекуррентная непараметрическая идентификация условных функционалов слабозависимых последовательностей // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 1 (2).
12. **Легкоконец В. К.** Определение стационарности линейных стохастических процессов, применяемых для прогнозирования экономических показателей в эконометрике // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 2 (57). С. 137-140.
13. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
14. **Магнус Я. Р., Нейдекер Х.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и экономике. М.: Физматлит, 2002.
15. **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
16. **Мун Ф.** Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
17. **Ризниченко Г. Ю.** Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

УДК 316.344.34:378.2
Социологические науки

В данной статье раскрывается проблема адаптации новой системы образовательного процесса - Болонской системы образования - на Дальнем Востоке России. Основное внимание авторами акцентируется на статусе бакалавра и магистра при получении диплома и на том, как этот статус влияет в дальнейшем на трудоустройство и жизнедеятельность выпускников вузов.

Ключевые слова и фразы: высшее образование; бакалавр; магистр; Болонская система образования; статус.

Татьяна Анатольевна Лидзарь, к. филос. н.
Евгения Николаевна Фетисова, к. филос. н.
Кафедра философии и культурологии
Тихоокеанский государственный университет
lidzar@mail.27.ru

БОЛОНСКАЯ СИСТЕМА ОБРАЗОВАНИЯ НА ДАЛЬНЕМ ВОСТОКЕ РОССИИ©

Все высшие учебные заведения России начали переход на новую систему образовательного процесса, в основе которой лежит Болонская декларация о Зоне европейского высшего образования (народное название - Болонская система образования). Она была подписана в Италии в 1999 году министрами образования 29 европейских стран. Россия присоединилась к Болонской декларации в сентябре 2003 г. Как происходит адаптация к этой системе на Дальнем Востоке России, что она дает в дальнейшем в жизнедеятельности