

Пиль Эдуард Анатольевич

**МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ОКОЛО ДАННОГО СОСТОЯНИЯ**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2010/10/52.html](http://www.gramota.net/materials/1/2010/10/52.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2010. № 10 (41). С. 167-169. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2010/10/](http://www.gramota.net/materials/1/2010/10/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

2. Анна и Вадим собираются поехать в туристическую поездку за границу. Для оформления визы требуется записаться в консульство той страны, которую они собираются посетить. Запись в консульство может осуществляться двумя способами: лично в определенные часы (бесплатно) или по телефону в любое время (платно). Анна предпочла сэкономить деньги и съездить для записи в консульство лично, Вадим же предпочел воспользоваться телефонной услугой и не тратить время на лишнюю поездку.

3. Юрий и Николай – совладельцы фирмы. Они заключили контракт с японской фирмой на единовременную поставку бытовой техники в Россию. Японцы были заинтересованы в том, чтобы развивать долгосрочный бизнес, и предложили Юрию и Николаю организовать этот бизнес в России, вложив в него выручку от первой поставки. Юрий согласился, но Николай сказал, что он против: вложение окупится не скоро, а деньги нужны сейчас, поэтому лучше ограничиться единичной поставкой.

4. К мэру города N пришли два заместителя с просьбой рассудить их. В процессе подготовки к юбилею города один из них – Владимир – предлагал устроить дорогостоящий салют и пригласить известных артистов. Главный аргумент Владимира – денег в бюджете города достаточно, чтобы позволить себе такое мероприятие. Другой зам – Игорь – был против таких затрат и предлагал ограничиться выступлением местных исполнителей и народным гулянием. Главный аргумент Игоря – деньги лучше сэкономить.

5. Два друга, Андрей и Константин, хорошо зарабатывают и стремятся сберечь деньги. Константин откладывает деньги на депозит в Сбербанк, получая стабильный процент, а Андрей пытается постигнуть «экономические премудрости» и научиться извлекать прибыль из вложенных денег. Он читает различные журналы и газеты по экономике и вкладывает деньги в паевые фонды, акции, при этом иногда ошибается, а иногда вкладывает удачно. Константин считает, что Андрей зря тратит время и нервы, так как в итоге прибыль у Андрея получается примерно такая же, как и у Константина в Сбербанке.

6. При поступлении на работу, Кирилл предупредили, что его официальная зарплата будет небольшой, а ее большая часть будет «в конверте». Кирилл отказался, сказав, что лучше пусть его зарплата будет меньше, но вся будет официальной, и он будет «чист» перед законом. На следующий день, его новый коллега, Петр, узнав об его отказе, усмехнулся, сказав, что лично он спокойно получает и будет дальше получать «серую» зарплату, которая заметно больше официальной.

7. Людмила и Нина 12 лет работали бухгалтерами в небольших фирмах. Их подруга работала в крупной западной компании и порекомендовала их своему руководству как хороших специалистов, когда в ее компании открылись вакансии бухгалтеров с высоким окладом. Однако в компанию брали только после прохождения трехмесячного испытательного срока. За это время место бухгалтера на прежней работе могло быть занято. Людмила уволилась и пошла на испытательный срок в западную компанию, а Нина предпочла не рисковать и остаться на прежнем месте работы.

8. Антон и Сергей хотят приобрести автомобили. Антон хочет взять кредит, так как хочет совершить покупку быстрее, пусть даже на не слишком выгодных для себя условиях. Сергей же, не имея, как и Антон, достаточных средств на полную оплату стоимости автомобиля в настоящий момент, решает отложить покупку и накопить деньги на автомобиль, не прибегая к кредитованию.

9. Две рабочие группы несколько месяцев работали над реализацией общего проекта. Когда цель была достигнута, их руководители – Николай и Владимир – решили премировать сотрудников. Николай распределил премии в соответствии с трудовым вкладом сотрудников: чем большую работу выполнил сотрудник, тем большее вознаграждение он получил. Владимир выдал всем своим сотрудникам одинаковое вознаграждение независимо от их вклада.

10. Две подруги, Елена и Наталья, решили пройтись вместе по магазинам. Обе выбрали себе новые наряды. Несмотря на то, что вещи стоили достаточно дорого, Елена решила сделать покупку в этот же день. Наталья же решила дождаться распродажи и приобрести выбранные комплекты со скидкой или же поискать подобные вещи в других магазинах.

11. Дмитрий и Иван – выпускники художественного училища, начинающие свою трудовую карьеру. Среди подходящих предложений на рынке труда они нашли две вакансии. Одна вакансия предполагала работу в недавно открывшейся дизайн-студии за небольшой оклад, но с широкими возможностями для творчества. Другая – работу в крупном рекламном агентстве с высокой оплатой труда, но с достаточно рутинными обязанностями: оформлением рекламных щитов. После некоторых раздумий, Дмитрий решил попробовать себя на первую вакансию, а Иван – на вторую.

---

УДК 510.6:683.3

*Эдуард Анатольевич Пиль*  
*Петербургский государственный университет путей сообщения*

#### МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ОКОЛО ДАННОГО СОСТОЯНИЯ<sup>©</sup>

Как состояние экономики, так и численность населения страны подвержены разнообразным внешним и внутренним воздействиям, что позволяет применить для описания их состояния уравнения колебания [1]. При этом их состояния могут иметь максимумы, минимумы или иметь участки параллельные оси абсцисс.

Под экономическим равновесием будем понимать такое состояние, когда количество произведенных товаров  $G_i$  и сервисных услуг  $S_j$  в единицу времени  $t_0$  полностью потребляется населением  $P_k$  за это же самое время. Также примем, что значения  $G_i$ ,  $S_j$  и  $P_k$  не изменяются в течение определенного промежутка времени

$\Delta t_c$ . При этом за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t_c$  будет выпущено товаров  $\sum_{i=1}^n G_i$ , сервисных услуг

$\sum_{j=1}^m S_j$  и потреблено соответственно населением  $\sum_{k=1}^s P_k$ . Таким образом, экономическое равновесие можно

записать следующими выражениями (1) или (2)

$$\sum_{i=1}^n G_i + \sum_{j=1}^m S_j = \sum_{k=1}^s P_k, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n G_i + \sum_{j=1}^m S_j - \sum_{k=1}^s P_k = 0. \quad (2)$$

Из этих двух уравнений видно, что значения  $\sum_{i=1}^n G_i$  и  $\sum_{j=1}^m S_j$  могут быть равны нулю, тогда будем иметь:

$$\sum_{i=1}^n G_i = \sum_{k=1}^s P_k \text{ или } \sum_{j=1}^m S_j = \sum_{k=1}^s P_k.$$

Здесь сразу следует заметить, что значения  $G_i$ ,  $S_j$  и  $P_k$  постоянны в любой момент времени  $t_0$ , т.е.  $G_i = \text{const}$ ,  $S_j = \text{const}$  и  $P_k = \text{const}$ , а также и за рассматриваемый промежуток  $\Delta t_c$  т.е.  $\sum_{i=1}^n G_i = \text{const}$ ,  $\sum_{j=1}^m S_j = \text{const}$

$$\text{и } \sum_{k=1}^s P_k = \text{const}.$$

Промежуток же времени  $\Delta t_c$  рассчитывается как:  $\Delta t_c = t_f - t_b$ , где  $t_b$  – время начала экономического равновесия, ед.;  $t_f$  – время конца экономического равновесия, ед.

Ввиду того, что потребление произведенных товаров и услуг  $\sum_{k=1}^s P_k$  изменяется во времени и при экономическом спаде уменьшается, а при подъеме экономики увеличивается, следовательно, можно записать следующее выражение (3)

$$\sum_{k=1}^s P_k = \int_{t_b}^{t_f} f(t) dt. \quad (3)$$

Для численности населения страны равновесие означает, что количество родившихся  $N_b$  и умерших  $N_m$  людей в единицу времени  $t_0$  равно, т.е.  $N_b = N_m$ . К сожалению, этот теоретический вопрос не был рассмотрен в книге С.П. Капицы [2]. Для рассматриваемого же промежутка времени  $\Delta t_N$  можно записать  $\sum_{i=1}^n N_{bi} = \sum_{i=1}^n N_{mi}$ .

Здесь под индексом  $n$  понимается количество регионов, из которых состоит рассматриваемая страна. В нашем же примере примем, что  $\Delta t_c = \Delta t_N$ . Следовательно, равновесие численности населения страны можно записать следующим интегралом (4)

$$\int_{t_b}^{t_f} N_{bi}(t) dt = \int_{t_b}^{t_f} N_{mi}(t) dt. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим математический аппарат, которым можно описать равновесия применительно к численности населения. Выше было принято, что количество родившихся и умерших людей в единицу времени равно. Но на практике это невозможно, чтобы один человек родился, а другой в эту же секунду умер, т.е. можно предположить, что после рождения проходит какое-то определенное время, после чего умирает человек. Следовательно, будем считать, что один человек – это та величина, которая возможна при равновесии численности населения. Таким образом для описания этого процесса воспользуемся малыми колебаниями и устойчивостью [1].

Предположение о малости отклонения  $u$ , которое служило основанием к тому, чтобы отбросить члены высших порядков в уравнении в вариациях, может быть оправдано в общем случае лишь для ограниченного промежутка времени  $T$ . Для определённости предположим, что в заданной скалярной системе число неизвестных равно числу уравнений и что она разрешима относительно старших производных, вследствие чего, по приведении к уравнениям первого порядка, она может быть представлена в форме матричного уравнения

$$\frac{dq}{dt} = \Phi(q, t), \quad (5)$$

а упрощённая система – в форме уравнения

$$\frac{dq}{dt} = \Phi(q, t), \quad (6)$$

при этом  $q_i$  и  $\Phi$  суть столбцы с одним и тем же числом элементов, которое обозначим опять через  $n$ .

Рассматривая сначала случай  $\Phi \equiv 0$  и пользуясь общей теоремой о непрерывной зависимости решения от начального значения неизвестной  $q_0$ , можно предположить, что оно выбрано столь близким к начальному значению  $q(t_0)$  для порождающего решения, что от начального момента  $t_0$  до момента  $t_0+T$  отклонение  $y = q - q(t)$  остаётся меньшим сколь угодно малого положительного столбца  $\epsilon$ . Этого предположения, вообще, нельзя сделать, если промежутки времени  $T$  неограничен, а те выбранные физические процессы и описывающие их порождающие решения, для которых это всё же возможно являются исключительными и, согласно определению А. М. Ляпунова, называются *устойчивыми по отношению к координатам  $q_k$* .

Итак, выбранный процесс или состояние равновесия устойчивы при начальных возмущениях, если для любого положительного столбца  $\epsilon$  можно найти такой другой столбец  $\delta$ , выбирая  $|y_0| < \delta$  получим  $|y| < \epsilon$  при всех  $t$ , больших  $t_0$ ; в противном случае будем иметь неустойчивость. Если, выбирая достаточно малое  $|y_0|$ , имеем  $y \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то устойчивость называется *асимптотической*. Таким образом, понятие об устойчивости выбранного процесса связано со свойствами соседних процессов. Устойчивый процесс стремится удерживать свои свойства, так как соседние процессы имеют тенденцию стремиться к совпадению с ним или, по крайней мере, не удаляться от него. Этим и объясняется важное значение устойчивых процессов в общей физике, несмотря на их исключительность. Для численности населения, их значение ещё больше, так как, в терминах математической теории, задача всякого регулятора состоит в том, чтобы, управляя численностью населения в системе, подлежащей регулированию, сделать устойчивым некоторое желаемое её состояние или происходящий в ней процесс или же усилить уже существующую устойчивость. Этим объясняется роль техники регулирования как источника задач для теории устойчивости и теории колебаний. Только для устойчивых процессов соседние процессы имеют характер колебаний около выбранного состояния.

Можно также сказать, что для численности населения, лишь в случае устойчивых процессов математический аппарат линейных уравнений в вариациях вполне адекватен физике явления для неограниченного промежутка времени.

Поэтому задача установления признаков устойчивости для численности населения имеет важнейшее значение не только для изучения самого данного процесса, но косвенным образом и для суждения о законности метода уравнений в вариациях при изучении соседних процессов. Простейший путь к решению состоит здесь в изучении самого линейного уравнения в вариациях и его интеграла; в этом случае можно будет говорить о *линейной устойчивости*. Однако выводы, получаемые этим путём, не вполне надёжны, так как мы пользуемся здесь тем самым линейным приближением, законность которого ещё только предстоит проверить. При строгой постановке, основанной на анализе точных уравнений, проблема устойчивости принадлежит к числу труднейших; в её общей классической постановке она разрешена А. М. Ляпуновым. Результаты, полученные им для частных, но достаточно широких и важных классов задач, оправдывают метод уравнений в вариациях: оказывается, что суждение об устойчивости или неустойчивости, составленное на основании решения линейного уравнения, подтверждается и при строгой трактовке. В особых, или "*критически*", случаях линейное приближение не решает задачи: при наличии линейной устойчивости действительная устойчивость может иметь, а может и не иметь места. Для изучения действительных свойств изучаемых явлений ещё важнее то, что во многих случаях линейное приближение хотя и подтверждается теоретически в указанном смысле, но лишь в очень малой области, так что для сколько-нибудь значительных начальных отклонений, которые в действительности всегда могут иметь место, качественная картина явления уже сильно отличается от той, которую даёт линейная трактовка. Аналогичные проблемы возникают и при  $\Phi \neq 0$  в этом случае  $q(t)$  не является решением заданного уравнения, так что, полагая  $y_0 = 0$ , мы не будем иметь  $y = 0$  при  $t_0 < t$ . Для получения малых отклонений  $y$  на конечном или бесконечном интервале времени нужно как-либо ограничить разность  $q - \Phi$ . Выбранный процесс или состояние равновесия называются *устойчивыми при длительных возмущениях*, если для любого положительного столбца  $\epsilon$  можно найти такой другой столбец  $\delta$ , что, полагая  $y_0 = 0$  и требуя, чтобы при  $t_0 < t$  и  $|y| < \delta$  длительные возмущения удовлетворяли неравенству  $|q - \Phi| < \epsilon$ , получим  $|y| < \epsilon$  при всех  $t$ , больших  $t_0$  [Там же].

#### Список литературы

1. Булгаков Б. В. Колебания. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954. 891 с.
2. Капица С. П. Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живет и будет жить на Землю. М.: Наука, 1999. 190 с.