Астахова Н. А., Бузутта Т. И.
ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОЙ ПРЕДМЕТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ УЧЕБНЫХ ЦЕЛЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/1/3.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2008. № 1 (8). C. 13-15. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/1/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

систем компьютерного моделирования, что положительно отразится на качестве их конструкторской и технологической подготовки.

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОЙ ПРЕДМЕТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ УЧЕБНЫХ ЦЕЛЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Астахова Н. А., Бузулина Т. И.
Волгоградский государственный педагогический университет

Одним из важнейших направлений профессионально-методической подготовки будущего учителя математики является овладение умениями, связанными с применением полученных знаний в процессе решения задач.

Формулировка задачи, например, математической, – это материал учебной задачи, решаемой обучающимися в процессе изучения предмета. Для решения этой учебной задачи могут потребоваться разные действия с указанным материалом. Одна и та же предметная задача может служить достижению нескольких конкретных учебных целей и, следовательно, быть компонентом нескольких учебных задач.

Рассмотрим следующую задачу:

«На множестве целых чисел Z заданы бинарные операции следующим образом: $\forall a, b \in Z\ a \oplus b = a + b - 1,\ a \otimes b = a + b - a \cdot b$. Докажите, что $\langle Z, \oplus, \otimes \rangle$ – область целостности, но не поле».

Эта задача хороша тем, что ее применение помогает отработать умение, используя только определения, проверять свойства операций (выполнимость, ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность одной операции относительно другой), находить нейтральные элементы (ноль и единицу кольца), нейтрализаторы (противоположный и обратный элементы), делители нуля. Обратим внимание, что при данном способе задания операций нулем (нейтральным элементом относительно сложения $\oplus$) кольца является число 1, а единицей (нейтральным элементом относительно умножения $\otimes$) – число 0.

Действительно, $\forall a \in Z\ a \oplus 1 = a + 1 - 1 = a,\ a \otimes 0 = a + 0 - a \cdot 0 = a$.

На данную непривычную ситуацию нужно обратить особое внимание при нахождении нейтрализаторов и делителей нуля. Найдем противоположный элемент для произвольного целого числа a из соотношения (заметим, что 1 – ноль): $\forall a \in Z\ \exists a' \in Z\ (a \oplus a' = a' \oplus a = 1)$. Итак, $a \oplus a' = a + a' - 1 = 1$, откуда $a' = 2 - a$. Заметим, что для любого целого числа a можно найти противоположный элемент 2–a во множестве целых чисел. Аналогично пытаемся найти обратный элемент (0 – единица кольца) из соотношения: $a \otimes a^{-1} = a + a^{-1} - a \cdot a^{-1} = 0$. Получим $a^{-1} = \dfrac{a}{a-1}$. Заметим, что обратный элемент есть не у всякого целого числа, отличного от нуля кольца (целого числа 1), т.к. $\dfrac{a}{a-1}$ не всегда принадлежит Z. Отсюда следует, что $\langle Z, \oplus, \otimes \rangle$ – не поле.

Особенно интересна попытка найти делители нуля, поскольку в процессе их поиска отрабатывается умение интерпретировать определение в применении к конкретной ситуации. Определение “элементы a и b – делители нуля, если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \cdot b = 0$” для нашего случая имеет вид: “элементы a и b – делители нуля, если $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \otimes b = 1$”. Имеем $a \otimes b = a + b - a \cdot b = 1$, откуда $(a-1)(1-b) = 0$, т.е. $a = 1$ или $b = 1$, что противоречит условиям определения, следовательно, делителей нуля нет. Таким образом, доказывается нужное утверждение.

В дальнейшем эту же задачу можно использовать для отработки понятий гомоморфизма и изоморфизма. Легко доказать, что $\langle Z, \oplus, \otimes \rangle$ и $\langle Z, +, \cdot \rangle$ (область целостности Z относительно обычных операций сложения и умножения) изоморфны. Для этого можно построить отображение $f: Z \to Z$ следующим образом: $\forall x \in Z$ $f(x) = 1 - x$. Если студенты сами не догадаются предложить такого отображения, следует им напомнить, что ноль (число 1) и единица (число 0) одного кольца должны переходить при отображении f соответственно в ноль (число 0) и единицу (число 1) другого кольца, т.е. $f(1) = 0$, $f(0) = 1$. Когда отображение построено, проверяем, является ли оно биективным отображением (у каждого элемента множества целых чисел существует и притом единственный прообраз) и гомоморфизмом, т.е. $\forall x, y \in Z$

$f(x \oplus y) = f(x+y-1) = 1-(x+y-1) = (1-x)+(1-y) = f(x)+f(y);$

$f(x \otimes y) = f(x+y-xy) = 1-(x+y-xy) = (1-x)-y(1-x) = (1-x)(1-y) = f(x) \cdot f(y).$

Можно на этом примере показать, что построение изоморфизма дает нам право утверждать, что $\langle Z, \oplus, \otimes \rangle$ – область целостности, как изоморфная алгебраическая система $\langle Z, +, \cdot \rangle$, т.е. нет необходимости проверять все свойства, описанные ранее.

Различные способы решения одной задачи можно использовать на одном занятии для отработки умения использовать полученные знания в рамках одной темы.

Например, рассмотрим задачу:

A – конечное n-элементное множество, т.е. $|A| = n$. $P(A)$ – множество всех подмножеств множества A. Доказать, что $|P(A)| = 2^n$.

Первый способ.

Эту задачу можно использовать для отработки умений проводить комбинаторные вычисления. Если $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, то для каждого подмножества множества A можно определить, входит или нет в него элемент a_k. Итак, для каждого элемента a_k (k = 1,2,…,n) существует две возможности, т.е. всего существует $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n\ раз}$ способов сформировать подмножества множества A. Следовательно, во множестве P(A) 2^n элементов.

Второй способ.

Решить эту задачу можно, используя формулы комбинаторики. Сначала выясним, сколько существует k-элементных подмножеств n-элементного множества. По определению сочетание из n по k – это и есть такое подмножество, т.е. количество k-элементных подмножеств n-элементного множества равно C_n^k. Поскольку нас интересует количество всех подмножеств множества A, то ответ: $C_n^0 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

Третий способ.

Эту задачу можно использовать для отработки умения применять метод математической индукции для натуральных чисел в первой форме.

Сначала покажем, что если $|A| = 1$, то $|P(A)| = 2^1 = 2$. Действительно, если A = {a}, то P(A) = {∅, {a}}. Предположим, что утверждение верно для натурального числа k, т.е. если $|A| = k$, то $|P(A)| = 2^k$. Докажем, что утверждение верно для k+1, т.е. если $|B| = k+1$, то $|P(B)| = 2^{k+1}$. Пусть $B = \{a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}\} = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \cup \{a_{k+1}\} = A \cup \{a_{k+1}\}$. Тогда для множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ утверждение верно (по индуктивному предположению), т.е. $|P(A)| = 2^k$. Все подмножества множества A являются также подмножествами множества B, следовательно, мы уже нашли 2^k подмножеств множества B. Остальные подмножества множества B получаются из всех подмножеств множества A добавлением к каждому из них элемента a_{k+1}, т.е. получаем еще 2^k подмножеств множества B. Других подмножеств нет, поэтому $|P(B)| = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, что и требовалось доказать. Итак, утверждение выполняется для всех натуральных чисел n.

Чтобы показать связь между способами построения фактормножества по отношению эквивалентности, факторгруппы по нормальной подгруппе и факторкольца по идеалу, полезно использовать задачу построения Z_m.

Действительно, при изучении темы "Отношения эквивалентности" можно рассмотреть бинарное отношение R, заданное на Z следующим образом: $\forall a, b \in Z\ aRb \Leftrightarrow m|(a-b)$, где m – фиксированное целое число, m>1. Следует проверить свойства этого отношения, заметить, что данное отношение является отношением эквивалентности, построить соответствующие классы эквивалентности и рассмотреть фактормножество Z/R (множество всех классов эквивалентности по данному отношению).

Рассматривая тему "Нормальные подгруппы", можно показать, что все подгруппы группы $\langle Z, + \rangle$, имеющие вид mZ, являются нормальными подгруппами Z, поскольку $\langle Z, + \rangle$ – абелева группа. Затем можно рассмотреть все различные смежные классы группы Z по подгруппе mZ, т.е. построить факторгруппу по нормальной подгруппе. Легко найти связь между классами эквивалентности и смежными классами вида 0+mZ, 1+mZ, …, (m–1)+mZ.

К этому же множеству можно возвратиться при рассмотрении темы "Построение факторколец по идеалу". Легко показать, что mZ – идеал кольца $\langle Z, +, \cdot \rangle$, а отношение сравнимости по идеалу mZ сводится к отношению эквивалентности следующим образом: элементы a и b сравнимы по идеалу mZ тогда и только тогда, когда $a - b \in mZ$, т.е. a–b = mz для некоторого целого числа z, значит, $m|(a-b)$ (так задано отношение эквивалентности). Заметим, что элементы факторкольца Z по идеалу mZ в точности совпадают с соответствующими классами эквивалентности и смежными классами по нормальной подгруппе. Здесь же следует обратить внимание на то, что на фактормножестве мы не задаем операций, в факторгруппе задана одна бинарная операция, а в факторкольце – две.

Иногда, предлагая задачу в рамках изучаемой темы, мы предопределяем стратегию ее решения, так как она связана с базисом (теоретической и практической основой, необходимой для решения) и способом решения задачи, что сводит процесс решения к механическому выполнению операций над заданными величинами. Но рассмотрение этой же задачи при изучении другой темы требует от обучающихся новой стратегии решения, что несомненно представляет особенную ценность при формировании умения применять полученные знания в процессе решения задач.

Рассмотрим пример: "На проективной прямой заданы два репера $R=\{A_1,A_2,E\}$ и $R'=\{A_1',A_2',E'\}$ так, что $A_1'(3:-2)_R$, $A_2'(-5:1)_R$, $E'(5:-2)_R$. Найти $A_{R'}$ и B_R, если $A(7:1)_R$, $B(2:3)_{R'}$."

Эту задачу целесообразно использовать при изучении проективных преобразований. Так как матрица $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ несогласованная, следовательно, необходимо найти такие k_1 и k_2, что $\begin{cases} 3k_1-5k_2=5, \\ -2k_1+k_2=-2. \end{cases}$ Итак, $k_1=\frac{5}{7}$, $k_2=-\frac{4}{7}$. Формулы преобразования имеют вид: $\begin{cases} x_1=\frac{15}{7}x_1'+\frac{20}{7}x_2', \\ x_2=-\frac{10}{7}x_1'-\frac{4}{7}x_2'. \end{cases}$

Таким образом, нахождение координат точек A и B требует разумных действий с дробями. Можно обратить внимание на то, что находим проективные координаты точек, следовательно, разумнее, записав систему в виде $\begin{cases} 7x_1=15x_1'+20x_2', \\ 7x_2=-10x_1'-4x_2' \end{cases}$, найти $A(-48:85)_R$ и $B(-45:16)_R$.

При изучении темы "Сложное отношение четырех точек проективной прямой" эту же задачу целесообразно включить в план, так как сложное отношение и его свойства значительно ускоряют и упрощают процесс нахождения требуемых координат точек A и B.

Так как $(A_1'A_2',E'A)=\frac{x}{y}$, где $A(x:y)_{R'}$, следовательно, $\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}=-\frac{48}{85}$, т.е. $A(-48:85)_{R'}$. Аналогично, используя равенство $(A_1'A_2',E'B)=\frac{2}{3}$, находим $B(-45:16)_R$.

Применение одной задачи при изучении разных тем или при овладении разными методами решения способствует более глубокому освоению материала, повышению самоконтроля у обучаемых, позволяет решающему лучше проанализировать уже осознанные связи между компонентами задачи и установить новые.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Балашова Т. А., Демидова Н. Н., Колесникова А. А., Лавряшина Т. В.
Кузбасский государственный технический университет

Поиски эффективных методов повышения активизации учебного процесса привлекают в настоящее время внимание ученых, педагогов и практиков. Ключевой проблемой в решении этой задачи является управление познавательной деятельностью обучаемых.

Физика как наиболее общая наука о законах природы является базой для успешного освоения большинства инженерных дисциплин, представляя собой теоретическую и методологическую основу современной техники, технологии и производства. От качества усвоения курса физики зависит дальнейшая учебная деятельность студента. Наряду с приобретением новых знаний студенты должны уметь ориентироваться в многообразии проблем, которые могут возникать в процессе их творческой деятельности. Поэтому содержание образования в техническом вузе должно быть направлено на изучение следствий физической теории с целью последующего внедрения их в практику. В этой связи самостоятельная работа студентов является одной из важнейших компонент системы вузовского образования. Необходимость самостоятельного поиска информации формирует такие профессиональные качества будущего специалиста, как наблюдательность, критичность, умение анализировать, обобщать, сравнивать, оценивать.

Самостоятельная работа студентов (СРС) является необходимым компонентом процесса обучения, она определяет творческую деятельность студентов, направленную на приобретение ими новых знаний и навыков. Объем СРС предусмотрен в государственных образовательных стандартах второго поколения в виде процентной доли от объема часов, отводимых на изучение дисциплины. Эта доля составляет 50 % и в ближайшем будущем эту цифру планируется увеличить до 60 - 70 %.

В современной вузовской дидактике СРС рассматривается как вид учебного труда, осуществляемого без излишнего вмешательства извне, но под руководством преподавателя. Привив студенту умение самостоятельно работать (научив учиться), преподаватель формирует у будущего специалиста потребность в приобретении знаний на протяжении всей его профессиональной деятельности. Цель СРС - систематическое изучение дисциплины в течение семестра, закрепление и углубление полученных знаний и навыков, подготовка к предстоящим занятиям, формирование культуры умственного труда. Разумная организация такой работы существенно повышает качество обучения. Наиболее эффективной и результативной СРС может стать тогда, когда она организуется и реализуется в учебном процессе вуза в качестве целостной системы, пронизывающей все этапы обучения в высшей школе. Именно систематическое изучение учебной дисциплины позволяет студенту достигнуть уровня требований ГОС к профессиональной подготовленности: иметь пред-